www.facebook.com/daykem.quynhon

NGUYỄN PHÚ KHÁNH



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

KHẢO SÁT HÀM SỐ & ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Luyện thi Đại học, Cao đẳng theo Cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT

VV 18.074

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:
Nhà sách HỒNG ÂN

Biên tập nội dung:
NGUYỄN NGỌC ĐỨC

Kĩ thuật vi tính:
NGUYỄN KHỞI MINH

Trình bày bìa:
TIÊU VĂN ANH

Mã số: 02.02.997/1001.PT2013

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC & PP GIẢI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

In 1.500 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Đăng kí KHXB số: 74– 2013/CXB/997-84/ĐHSP ngày 14/1/2013.
QĐXB số: 43/QĐ-ĐHSP ngày 29/1/2013.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2013.

Lời nói đầu

Đại thi hào William A.Ward từng nói: ***"Người thầy trung bình chỉ biết nói, người thầy giỏi biết cách giải thích, người thầy xuất chúng biết cách minh họa, còn người thầy vĩ đại biết cách truyền cảm hứng".***

Và tác giả thực sự hi vọng cuốn sách này sẽ trở thành nguồn cảm hứng cũng như tư liệu bổ ích cho các bạn thí sinh trong kì thi Đại học sắp tới. Nội dung cuốn sách được trình bày theo từng vấn đề, tương ứng từng chương, bài gần giống sách giáo khoa và cấu trúc đề thi Đại học của Bộ Giáo dục và Đào tạo *(theo chương trình giảm tải hiện hành).*

"Trọng tâm kiến thức và phương pháp giải toán: Hàm số mũ – Logarit, Tích phân, Đại số tổ hợp, Xác suất – Số phức" là một trong những cuốn thuộc bộ sách ***"Trọng tâm kiến thức và phương pháp giải toán"***, do tác giả biên soạn.

Bộ sách gồm 6 tập:

Tập I: Khảo sát hàm số và ứng dụng đạo hàm

Tập II: Hàm số mũ – Logarit, Tích phân, Đại số tổ hợp, Xác suất – Số phức

Tập III: Đại số và Lượng giác

Tập IV: Hình học trong không gian

Tập V: Hình học trong tọa độ

Tập VI: Bất đẳng thức và bài toán max – min trong các bài kiểm tra, thi học kì và trong kì thi tuyển sinh Đại học

Với cách viết khoa học và sinh động giúp bạn đọc tiếp cận với môn Toán một cách tự nhiên, không áp lực, bạn đọc trở nên tự tin và năng động hơn; hiểu rõ bản chất, biết cách phân tích để tìm ra trọng tâm của vấn đề và biết giải thích, lập luận cho từng bài toán. Sự đa dạng của hệ thống bài tập và tình huống giúp bạn đọc luôn hứng thú khi giải toán.

Trong sách, các ví dụ minh họa được chọn lọc, sắp xếp từ dễ đến khó và dẫn dắt đến những bài toán thi Đại học. Tác giả chú trọng gợi mở lời giải để bạn đọc

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

khám phá, bạn đọc sẽ ngạc nhiên với con đường tìm tòi của mình và đưa ra phương pháp giải đầy thú vị, sau mỗi lời giải chúng tôi đều có các lời bình, đúc kết kinh nghiệm.

Những câu hỏi mở trong sách có nội dung cơ bản bám sát sách giáo khoa và cấu trúc đề thi Đại học, đồng thời phân chia bài tập thành các dạng toán có lời giải chi tiết. Hiện nay đề thi Đại học không khó, tổ hợp của nhiều vấn đề đơn giản, nhưng chứa nhiều câu hỏi mở nếu không nắm chắc lý thuyết sẽ lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán. Với một bài toán, không nên thỏa mãn ngay với một lời giải mình vừa tìm được mà phải cố gắng tìm nhiều cách giải nhất cho bài toán đó, mỗi một cách giải sẽ có thêm phần kiến thức mới ôn tập.

Khi giải một bài toán, thay vì dùng thời gian để lục lọi trí nhớ, thì ta cần phải suy nghĩ phân tích để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán đó. Đối với Toán học, không có trang sách nào là thừa. Từng trang, từng dòng đều phải hiểu. Môn Toán đòi hỏi phải kiên nhẫn và bền bỉ ngay từ những bài tập đơn giản nhất, những kiến thức cơ bản nhất, vì chính những kiến thức cơ bản mới giúp bạn đọc hiểu được những kiến thức nâng cao sau này.

Giờ đây, chúng tôi chợt nhớ tới câu nói của Ludwig Van Beethoven: *"Giọt nước có thể làm mòn tảng đá, không phải vì giọt nước có sức mạnh, mà do nước chảy liên tục ngày đêm. Chỉ có sự phấn đấu không mệt mỏi mới đem lại tài năng. Do đó ta có thể khẳng định, không nhích từng bước thì không bao giờ có thể đi xa ngàn dặm"*.

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa:

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng. Hàm số f xác định trên K được gọi là:

- Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến trên K nếu với $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \ge 0$ với mọi $x \in I$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \le 0$ với mọi $x \in I$

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

Định lý:

Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn, f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầ mút của I). Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I.
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I.

Chú ý:

- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên $[a;b]$
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f nghịch biến trên $[a;b]$.
- Ta có thể mở rộng định lí trên như sau

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x) \ge 0$ với $\forall x \in I$ (hoặc $f'(x) \le 0$ với $\forall x \in I$) và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

Chú ý. *Vận dụng định lí trên vào các hàm số thường gặp trong chương trình.*

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

**Nếu hàm số f là hàm đa thức (không kể hàm số hằng) hoặc $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó P(x) là đa thức bậc hai, Q(x) là đa thức bậc nhất và P(x) không chia hết cho Q(x) thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên K* $\Leftrightarrow \forall x\in K, f'(x)\ge 0\ (f'(x)\le 0)$.

**Nếu hàm số f là hàm nhất biến,* $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ *với a,b,c,d là các số thực và* $ad-bc\ne 0$ *thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên K* $\Leftrightarrow \forall x\in K, f'(x)>0\ (f'(x)<0)$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bài toán 01: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

Phương pháp.

B1. Tìm tập xác định của hàm số f

B2. Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x_0 sao cho $f'(x_0)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

B3. Lập bảng xét dấu $f'(x)$, dựa vào định lí 1, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B4. Kết luận.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=\frac{2-4x}{1-x}$ 2. $\frac{2x+1}{x+1}$

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có: $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0\quad \forall x\in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4$; $\lim\limits_{x\to1^+} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	||	−	
y	4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ta có: $y'=\frac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in D$, suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Ví dụ 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=\frac{x^2}{1-x}$ 2. $y=\frac{-x^2-x+5}{x+2}$

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có: $y'=\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$

$\forall x\in D:\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\to y=0\\ x=2\to y=-4\end{array}\right.$

Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		−	0	+	||	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	0 (CT)	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-4 (CĐ)	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$;

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Ta có: $y'=-1-\dfrac{3}{(x+2)^2}<0\ \forall x\in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Ví dụ 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $f(x)=\dfrac{x^3-4x+8}{x-2}$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(3x^2-4)(x-2)-(x^3-4x+8)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}$

$\forall x\in D$: $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-6x^2=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	-4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	23 CT	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;3)$;

Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Ví dụ 4: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=x^3-3x^2+4$

2. $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-1$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2-6x$

$\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ y(0)=4\\x=2,\ y(2)=0\end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$ 4	↘	y_{CT} 0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;\ 0)$ và $(2\ ;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0\ \forall x\in D$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Ví dụ 5: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=x^4+2x^2-4$

2. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2$

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1)$

$\forall x \in D$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \to y(0) = -4$

- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-4 CT	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

2. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^3 - 4x = x(x^2-4)$.

$\forall x \in D$: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y(0) = 2 \\ x = \pm 2 \to y(\pm 2) = -2 \end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2 CT	↗	2 CĐ	↘	-2 CT	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Ví dụ 6: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y = 9x^7 - 7x^6 + \frac{7}{5}x^5 + 12$
2. $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 7x^4(3x-1)^2$.

$y' = 0$ với $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{3}$ và $y' > 0$ với mọi $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{3}$.

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty;0]$, đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ và nửa khoảng $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = (x^2-1)(2x^2-3x+2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$ vì $2x^2 - 3x + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y = \frac{x-2}{x-1}$ 2. $y = \frac{2x-1}{x-1}$

2. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ 4. $y = \frac{3x+1}{2+4x}$

Bài 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y = \frac{x^2+4x+4}{x+1}$ 2. $y = \frac{4x^2+5x+5}{x+1}$

3. $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ 4. $y = \frac{-x^2+2x-1}{x+2}$

Bài 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 2. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 4$

3. $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$ 4. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

5. $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26$

Bài 4: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y = -2x^4 + 4x^2$ 2. $y = x^4 - 6x^2 + 8x - 1$

3. $y = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ 4. $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 1$

Bài 5: Chứng minh hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y = \frac{2}{3}x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài toán 02: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, CHỨA CĂN THỨC

Phương pháp

. **Nhận xét:**

- Bài toán xét tính đơn điệu của hàm số được chuyển về bài toán xét dấu của một biểu thức (y').
- Khi tính đạo hàm của hàm số có dạng $y=|f(x)|$ ta chuyển trị tuyệt đối vào trong căn thức $y=\sqrt{f^2(x)}$, khi đó tại những điểm mà $f(x)=0$ thì hàm số không có đạo hàm.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y=\sqrt{1-x^3}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng $(-\infty;1]$.

Ta có: $y'=-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$

$y'=0$ khi $x=0$ và $y'<0$ khi $\forall x\in(-\infty;1)$ và $x\neq 0$.

Do đó hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;1]$.

Chú ý: $y'=0$ tại $x=0$ thì hàm số không đổi dấu trên nửa khoảng $(-\infty;1]$.

Ví dụ 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y=(x+3)\sqrt{3-2x-x^2}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-3;1]$.

Ta có: $y'=\dfrac{-2x(x+3)}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, hàm số không có đạo hàm tại $x=-3$, $x=1$

Với $\forall x\in(-3;1)$: $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-3<x<1\\ -2x(x+3)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	[redacted]	-3		0		1	[redacted]
y'			+	0	−		
y			↗	$3\sqrt{3}$	↘		

Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-3;0)$, hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(0;1)$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=\sqrt{x^2-2x}$
2. $y=\sqrt{x^3-2x}$
3. $y=\sqrt{3x^2-x^3}$
4. $y=x\sqrt{1-x^2}$

Bài 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=x+\sqrt{2x-x^2}$
2. $y=(2x+1)\sqrt{9-x^2}$
3. $y=\sqrt{x^2-x-20}$
4. $y=x+1-2\sqrt{x^2+3x+3}$

Bài 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

Bài 4: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=|x+1|$
2. $y=|x^2+2x-3|$

Bài 5: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=|x^2-2x-3|$
2. $y=|x^2-4x+3|+4x+3$

Bài toán 03: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ KHÁC

Ví dụ

Ví dụ: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2}$. Với $\forall x\in\mathbb{R}$: $y'=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=0$ hoặc $x=1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	

Trên khoảng $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$: $y'>0\Rightarrow y$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$;

Trên khoảng $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$: $y'<0\Rightarrow y$ nghịch biến trên các khoảng $x\in(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y=\dfrac{4x+5}{4x^2-4}$
2. $y=\dfrac{12x+1}{12x^2+2}$
3. $y=\dfrac{3x^2-x+1}{x^2-x+1}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài toán 04: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp

Vì $y'=0$ tại vô hạn điểm nên ta chưa thể kết luận hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta sẽ chứng minh hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ bằng định nghĩa.

Với $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, khi đó luôn tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa x_1, x_2

Do $y'=0$ tại hữu hạn điểm trên khoảng $(a;b)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b) \Rightarrow y(x_1) > y(x_2) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Chú ý:

- Khi xét tính đơn điệu của hàm số chứa hàm lượng giác chúng ta cần lưu ý là đạo hàm của hàm số có thể triệt tiêu tại vô hạn điểm. Khi đó để xét tính đơn điệu của hàm số trên TXĐ, ta sẽ chuyển về xét tính đơn điệu trên một khoảng chứa hữu hạn điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu.
- Đối với hàm đa thức nếu tất cả các hệ số không đồng thời bằng 0 thì nó chỉ triệt tiêu tại hữu hạn điểm.

Ví dụ

Ví dụ: Chứng minh rằng hàm số: $y=\cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -2\sin 2x - 2 = -2(1+\sin 2x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $y'=0$ khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Vì $y'=0$ tại vô hạn điểm nên chưa thể kết luận hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Với $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$, khi đó luôn tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa $x_1; x_2$. Do $y'=0$ tại hữu hạn điểm trên khoảng $(a;b)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi đó $y(x_1) > y(x_2) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1. $y = 2\sin x + \cos 2x$ với $x \in [0;\pi]$
2. $y = \sin 2x - 2\cos x - 2x$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 2

1. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin 2x - 2x + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
2. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2x - 1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
3. Tìm m để hàm số $y = 2x + m\sin x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
4. Tìm m để hàm số $y = 2\cos 2x + mx - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 3 Tìm tham số m để hàm số: $y = mx + \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{9}\sin 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 2: Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu tập xác định

Phương pháp.

B.1. Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

B.2. Tính f'(x), vận dụng định lí 1 vào các hàm số thường gặp trong chương trình (xem phần tóm tắt giáo khoa)

Chú ý. *Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.*

Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$ thì

* $\forall x \in \mathbb{R}$ (hay $\mathbb{R}$ bớt đi một số hữu hạn điểm), $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a > 0 \end{cases}$.

* $\forall x \in \mathbb{R}$ (hay $\mathbb{R}$ bớt đi một số hữu hạn điểm), $f(x) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Bài toán 01: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

Phương pháp.

- Tìm TXĐ
- Tính y'
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

  Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó suy ra điều kiện của m.

Chú ý: *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên D*

- *Hàm số đồng biến trên $I \subset D \Leftrightarrow f'(x) \ge 0,\ \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm.*
- *Hàm số nghịch biến trên $I \subset D \Leftrightarrow f'(x) \le 0,\ \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm.*

Các ví dụ

Ví dụ 1: Định m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ hay $(-\infty;-m) \cup (-m;+\infty)$

Ta có: $y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$

Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-m)$ và $(-m;+\infty)$

$\Leftrightarrow y' > 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2$ hoặc $m > 2$

Vậy, với $m < -2$ hoặc $m > 2$ thì hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-m)$ và $(-m;+\infty)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 2: Định m để hàm số luôn đồng biến:

1. $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ 2. $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + (m-2)x - 2$

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Cách 1: Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, thì phải có $\Delta' \leq 0$, tức $9 - 3m \leq 0$ hay $m \geq 3$

Vậy, với $m \geq 3$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, thì phải có $m \geq -3x^2 - 6x$.

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - 6x$ trên $\mathbb{R}$ và có $g'(x) = -6x - 6$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \geq g(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 3$

2. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3mx^2 - 2(2m-1)x + m - 2$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, thì phải có $\begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases}$, tức

$\begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 - 3m(m-2) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} (m+1)^2 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại m

Vậy không tồn tại m để thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm a để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bài 2: Tìm m để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

1. $y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$ 2. $y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x - 1}$

Bài 3: Tìm m để hàm số:

1. $y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 - (3m-1)x + m^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

3. $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4. $y = mx + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-4}\right)^3$ đồng biến trên tập xác định của nó.

5. $y = x + 1 + m\sqrt{x^2 + 1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 4: Tìm m để hàm số: $y = \frac{-3x^2 + mx - 2}{2x - 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bài toán 02: TÙY THEO THAM SỐ m KHẢO SÁT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ.

Ví dụ : Tùy theo m khảo sát tính đơn điệu của hàm số:

$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}m(m+1)x^2 + m^3x + m^2 + 1$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - m(m+1)x + m^3$ và $\Delta = m^2(m-1)^2$

+ $m = 0$ thì $y' = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại điểm $x = 0$. Hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; 0]$ và $[0; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m = 1$ thì $y' = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại điểm $x = 1$. Hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; 1]$ và $[1; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m \neq 0, m \neq 1$ khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = m$ hoặc $x = m^2$

· Nếu $m < 0$ hoặc $m > 1$ thì $m < m^2$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		m		m^2		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$ và $(m^2; +\infty)$, giảm trên khoảng $(m; m^2)$.

· Nếu $0 < m < 1$ thì $m > m^2$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		m^2		m		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m^2)$ và $(m; +\infty)$, giảm trên khoảng $(m^2; m)$.

VV 18.074

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

• $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1<\alpha<x_2$. Đặt $t=x-\alpha$, khi đó $g(t)=f(t+\alpha)$. Bài toán trở thành $g(t)=0$ có hai nghiệm trái dấu tức $t_1<0<t_2 \Leftrightarrow \Delta>0,\ P<0$.

• $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1\le x_2<\alpha$. Đặt $t=x-\alpha$, khi đó $g(t)=f(t+\alpha)$. Bài toán trở thành $g(t)=0$ có hai nghiệm cùng âm, nghĩa là $t_1\le t_2<0 \Leftrightarrow \Delta\ge 0,\ S<0,\ P>0$.

• $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\beta<x_1\le x_2$. Đặt $t=x-\beta$, khi đó $g(t)=f(t+\beta)$. Bài toán trở thành $g(t)=0$ có hai nghiệm cùng dương, nghĩa là $0<t_1\le t_2 \Leftrightarrow \Delta\ge 0,\ S>0,\ P>0$.

• Để ý $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn:

$x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)<0 \Leftrightarrow x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2<0$

$\alpha<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>2\alpha\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases}$ $\qquad x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2<2\alpha\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases}$

$\alpha<x_1<x_2<\beta \Leftrightarrow \Delta>0,\ 2\alpha<x_1+x_2<2\beta,\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0,\ \ (x_1-\beta)(x_2-\beta)>0$.

Ví dụ

> **Ví dụ.**
>
> Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx+6m}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:
>
> 1. Đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó; 2. Đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

1. Xét hai trường hợp.

TH1: Khi $m=-1$, ta có hàm số $y=\dfrac{2x-6}{x-1}$ và $y'=\dfrac{4}{(x-1)^2}>0$ với mọi $x\in D$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Vậy, $m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

TH2: Khi $m\ne -1$, ta có $y'=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}$

Đặt $g(x)=(m+1)x^2-2(m+1)x-4m$ và ta có y' cùng dấu với $g(x)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow \forall x\in D, y'\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in D, g(x)\ge 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=(m+1)^2+4m(m+1)\le 0\\ m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)(5m+1)\le 0\\ m>-1\end{cases} \Leftrightarrow -1<m\le -\dfrac{1}{5}$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu của bài toán là $\left[-1;-\dfrac{1}{5}\right]$.

2. Theo câu trên $m=-1$ thỏa mãn đề bài.

Với $m\ne -1$ Khi đó hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$

$\Leftrightarrow \forall x\in(4;+\infty), g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in(4;+\infty), \dfrac{2x-x^2}{x^2-2x-4}\le m$

(do $x^2-2x-4>0\ \forall x\in(4;+\infty)$)

Xét hàm $h(x)=\dfrac{2x-x^2}{x^2-2x-4}$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \forall x\in(4;+\infty), h(x)\le m$ ta lập bảng biến thi của $h(x)$ trên $(4;+\infty)$.

$h'(x)=\dfrac{8x-8}{(x^2-2x-4)^2}>0\ \forall x\in(4;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-1}{1-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=-1$.

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ suy ra $\forall x\in(4;+\infty),\ h(x)\le m \Leftrightarrow -1<m$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu của bài toán là $[-1;+\infty)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Định m để hàm số:

1. $y=\dfrac{2x-1}{x-m}$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$
2. $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
3. $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
4. $y=\dfrac{x^2-2mx+3m^2}{2m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
5. $y=\dfrac{x^2+5x+m^2+6}{x+3}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bài 2: Định m để hàm số:

1. $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
2. $y=x^3+3x^2-mx-4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
3. $y=\dfrac{x^3}{3}-mx^2+(1-2m)x-1$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Dạng 3: Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu trên khoảng xác định

. Phương pháp.

Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

1. Hàm số f đồng biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (\alpha;\beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha;\beta)$.

Trường hợp 1:

- Nếu bất phương trình $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(m) \ge g(x)$ (*)

  thì f đồng biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \ge \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

- Nếu bất phương trình $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(m) \le g(x)$ (**)

  thì f đồng biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \le \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

Trường hợp 2: Nếu bất phương trình $f'(x) \ge 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - \alpha$. Khi đó ta có: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

Tương tự: *Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng*

– Hàm số f đồng biến trên khoảng $(-\infty;a) \Leftrightarrow g(t) \ge 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

– Hàm số f đồng biến trên khoảng $(a;+\infty) \Leftrightarrow g(t) \ge 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

2. Hàm số f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (\alpha;\beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha;\beta)$.

Trường hợp 1:

- Nếu bất phương trình $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow h(m) \ge g(x)$ (*)

  thì f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \ge \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

- Nếu bất phương trình $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(m) \le g(x)$ (**)

  thì f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \le \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

Trường hợp 2: Nếu bất phương trình $f'(x) \le 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - \alpha$. Khi đó ta có: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

Tương tự: *Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng*

– Hàm số f nghịch biến trên khoảng $(-\infty;a) \Leftrightarrow g(t) \le 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

– Hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;+\infty) \Leftrightarrow g(t) \le 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

Chú ý:

1. Phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$. $\quad x_1 \le 0 \le x_2 \Leftrightarrow P \le 0$.

$0 \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{cases}$ $\quad x_1 < x_2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \ge 0 \\ S < 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 0 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Trong đó: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$.

2. Nếu hàm số f(x) có giá trị nhỏ nhất trên tập D, thế thì:

$$\forall x \in D, f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f(x) \ge 0.$$

3. Nếu hàm số f(x) có giá trị lớn nhất trên tập D, thế thì

$$\forall x \in D, f(x) \le 0 \Leftrightarrow \max\limits_{x \in D} f(x) \le 0.$$

4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D

* $f(x) \ge k\ \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{D} f(x) \ge k$ (nếu tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$)

* $f(x) \le k\ \forall x \in D \Leftrightarrow \max\limits_{D} f(x) \le k$ (nếu tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$).

Bài toán 01: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG $K = (-\infty;\alpha), [\beta;+\infty), (-\infty;\alpha], [\beta;+\infty)$

Phương pháp.

Chú ý 1:

* Hàm số $y = f(x,m)$ tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min\limits_{x \in \mathbb{R}} y' \ge 0$.

* Hàm số $y = f(x,m)$ giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max\limits_{x \in \mathbb{R}} y' \le 0$.

Chú ý 2: Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + m(2m-1)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$

5. $y = \frac{1}{3}mx^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x - 2013$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

6. $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2013m(2m-1)$ đồng biến trên nửa $[2;+\infty)$

Bài 3: Định m để hàm số:

1. $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$
2. $y = x^3 + (m-1)x^2 - (2m^2 + 3m + 2)x$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$
3. $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
4. $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bài toán 02: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG XÁC ĐỊNH $(\alpha;\beta)$, $[\alpha;\beta]$

Phương pháp.

Ví dụ: Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ nghịch biến trong $(-1;1)$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m - 1$

Cách 1: Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1;1) \Leftrightarrow y' \le 0$ và $x_1 < -1 < 1 < x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1+1)(x_2+1) < 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < -8\end{cases} \Rightarrow m < -8$

Vậy, với $m < -8$ thì hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(-1;1)$

Cách 2: Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1;1) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-1;1)$ tức là phải có: $m \le -3x^2 - 6x + 1,\ \forall x \in (-1;1)$

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - 6x + 1, \forall x \in (-1;1)$ và có $g'(x) = -6(x+1)$

Với $\forall x \in (-1;1) \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \le g(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m < -8$

Vậy, với $m < -8$ thì hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(-1;1)$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Định m để hàm số:

1. $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng (1; 2).

2. $y = x^3 - (m+2)x^2 + (3m+2)x + 2$ đồng biến trên đoạn $[3;4]$

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1. $y = x^3 - 3x^2 + (2m+1)x - 4$. biến trên $[-2;-1]$
2. $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
3. $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.

Dạng 4: Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu trên khoảng có độ dài k cho trước.

Phương pháp

+ Tìm TXĐ

+ Tính y'

+ Hàm số có khoảng đồng biến (hoặc nghịch biến) $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 đồng thời $|x_2 - x_1| = k$

Chú ý:

$ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$, trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$, $|x_2 - x_1| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = k^2$ (a > (

Các ví dụ

Ví dụ 1: Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên một khoảng có d dài nhỏ hơn 1.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn $1 \Leftrightarrow y' \le 0$ trên đoạn (x₁, x

và $|x_1 - x_2| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ S^2 - 4P < 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 4 - 4m < 1\end{cases} \Rightarrow \frac{9}{4} < m < 3$

Vậy, với $\frac{9}{4} < m < 3$ thì hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số: $y = x^3 - mx^2 + (m+36)x - 5$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + m + 36$ và $\Delta' = m^2 - 3m - 108$

http://sachxua.edu.vn

http://sachxua.ed

Dễ thấy $a_{y'} = 3 > 0$, do đó hàm số đã cho không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $m < -9$ hoặc $m > 12$ tức $\Delta' > 0$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2.

Lập bảng xét dấu, ta thấy $y' < 0$ với $x \in (x_1; x_2)$ suy ra hàm số nghịch biến với $x \in [x_1; x_2]$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$ khi $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$ tức $\left|2\frac{\sqrt{m^2-3m-108}}{3}\right| = 4\sqrt{2}$, bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình:

$m^2 - 3m - 180 = 0 \Leftrightarrow m = -12$ hoặc $m = 15$ (thỏa điều kiện).

Vậy, với $m = -12$ hoặc $m = 15$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Định m để hàm số:

1. $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1
2. $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1
3. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{m-1}{2}x^2 - (m^2 + m)x - 1$ nghịch biến trên khoảng có độ dài là 3

Bài 2: Định m để hàm số:

1. $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1

Bài 3: Tìm m để hàm số:

1. $y = (m+1)x^3 - 3(m+1)x^2 + 2mx + 4$ đồng biến trên khoảng có độ dài không nhỏ hơn 1.
2. $y = x^3 - mx^2 + (m+36)x - 5$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$.

Dạng 5: Ứng dụng đơn điệu trong giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình

Trong khuôn khổ chương trình, tác giả chỉ đề cập những bài tập thường gặp. Bạn đọc muốn nghiên cứu kĩ về ứng dụng đơn điệu trong việc giải phương trình..., vui lòng tìm đọc tập sách: Đại số - lượng giác.

Phương pháp

Biến đổi phương trình,bất phương trình đã cho thành dạng $f(x) = g(m)$, $f(x) > g(m)$,... Sau đó lập bảng biến thiên của f(x), dựa vào bảng biến thiên này sẽ tìm được các giá trị của tham số thỏa yêu cầu của bài toán.

Dựa vào định nghĩa hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến ta thấy

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên D thì:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \text{ và } f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y.$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và nghịch biến trên D thì:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \text{ và } f(x) > f(y) \Leftrightarrow x < y.$$

Từ đó gợi cho chúng ta ứng dụng vào các bài toán chứng minh bất đẳng thức và các bài toán giải phương trình, bất phương trình. Cụ thể ta có các tính chất sau:

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì số nghiệm của phương trình : $f(x) = k$ (trên $(a;b)$) không nhiều hơn một và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in (a;b)$.

Chứng minh: Ta giả sử f là hàm đồng biến trên $(a;b)$

- Nếu $u > v \Rightarrow f(u) > f(v)$
- Nếu $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) ; hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình: $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Chứng minh: Giả sử f đồng biến còn g nghịch biến trên D và $\exists x_0 \in D : f(x_0) = g(x_0)$.

* Nếu $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = g(x_0) > g(x) \Rightarrow$ PT:$f(x) = g(x)$ vô nghiệm
* Nếu $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) = g(x_0) < g(x) \Rightarrow$ PT:$f(x) = g(x)$ vô nghiệm

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

Tính chất 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v \ (u < v) \quad \forall u, v \in D$.

Tính chất 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên [a;b] và có đạo hàm trên khoảng liên tục $(a;b)$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

Chứng minh:

Giả sử phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm trên $(a;b)$.

Khi đó $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a;b)$ (hoặc $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a;b)$).

Suy ra $f(b) > f(a)$ (hoặc $f(b) < f(a)$).

Điều này trái với giả thiết $f(a) = f(b)$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a;b)$.

Từ định lí này, ta có được hai hệ quả sau:

Hệ quả 1: Nếu phương trình $f(x) = 0$ có m nghiệm thì phương trình $f'(x) = 0$ có $m - 1$ nghiệm.

Hệ quả 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k liên tục trên $(a;b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Thật vậy: Giả sử phương trình $f^{(k-1)}(x)=0$ có nhiều hơn m + 1 nghiệm thì phương trình $f^{(k)}(x)=0$ có nhiều hơn m nghiệm, điều này trái với giả thiết bài toán.

Từ hệ quả 2 $\Rightarrow$ nếu $f'(x)=0$ có một nghiệm thì $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Chú ý: Sử dụng tính đơn điệu để giải phương trình – bất phương trình ta thường đi theo hai hướng sau:

Hướng 1: Đưa phương trình về dạng $f(x)=f(x_0)$, trong đó $y=f(t)$ là một hàm số liên tục và luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên tập đang xét.

Để làm theo hướng này, chúng ta cần nhẩm trước một nghiệm của phương trình và nhận diện được tính đơn điệu của hàm số f.

• Để nhẩm nghiệm, ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi để tìm nghiệm.

Cụ thể: Để tìm một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ ta thực hiện như sau

Bước 1: Nhập biểu thức f(x) (Dùng phím ALPHA+ X)

Bước 2: Dùng lệnh giải phương trình: SHIFT+CALC (SOLVE) nhập giá trị của X (nhập giá trị bất kì) =.

• Để nhận diện được tính đơn điệu của hàm số f, chúng ta cần chú ý

*Tổng hai hàm số đồng biến là một hàm số đồng biến

* Hàm số đối của một hàm số đồng biến là một hàm số nghịch biến.

* Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến thì $y=\sqrt[n]{f(x)}$ là hàm số đồng biến.

* Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương thì hàm số $y=\frac{1}{f(x)}$ là một hàm nghịch biến.

Hướng 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f(u)=f(v)$, trong đó u,v là các hàm theo x.

Làm theo hướng ta thường áp dụng khi gặp phương trình chứa hai phép toán ngược nhau.

Chú ý 1:

Ký hiệu K là **một** đoạn, **một** khoảng hoặc **một** nửa khoảng.

• Nếu $f(x)$ **liên tục** trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ **có ít nhất** một nghiệm $c\in(a;b)$.

• Nếu $f(x)$ **liên tục** và **đơn điệu** trên K thì phương trình $f(x)=0$ có **không quá một nghiệm** trên K.

Chú ý 2:

Nếu $f(x)$ liên tục và tăng trên K, $g(x)$ liên tục và giảm (hoặc là hàm hằng) trên K thì phương trình $f(x)=g(x)$ có không quá một nghiệm trên K.

• Nếu phương trình $f'(x)=0$ có n nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có không quá $n+1$ nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

• Tổng của 2 hàm tăng trên K là một hàm tăng trên K, tổng của 2 hàm giảm trên K là một hàm giảm trên K.

• Nếu $f(x)$ là hàm tăng trên K thì $a.f(x)$ tăng trên K nếu $a>0$ và $a.f(x)$ giảm trên K nếu $a<0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình:

1. $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$ *Đề thi Cao đẳng năm 2012*

2. $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$

3. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ *Đề thi Đại học khối B năm 2010*

4. $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}-x^3+3x^2+10x-26=0$

Lời giải

1. Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(2x)^3+2x=\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+\sqrt{2x+1}$ $(*)$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\4x^2=2x+1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt5}{4}$

2. Nhận xét đặc điểm các biểu thức dưới dấu căn ta thấy ở mỗi vế biểu thức dưới dấu căn hơn kém nhau 1. Do đó nếu ta đặt đặt $u=\sqrt[3]{x+1},\ v=\sqrt[3]{2x^2}$ thì phương trình đã cho trở thành: $\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v\Leftrightarrow f(u)=f(v)$.

Trong đó $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$, có: $f'(t)=\frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}}+1>0$ nên f(t) là hàm đồng biến.

Do đó: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 2x^2=x+1\Leftrightarrow x=1,x=-\frac{1}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=1,x=-\frac{1}{2}$.

3. Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge0\\6-x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{3}\\x\le6\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]$

Dễ thấy $x=-\frac{1}{3}$ hoặc $x=6$ không là nghiệm phương trình.

Cách 1: Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{1}{3};6\right)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right]+6x-14,\ x\in\left(-\frac{1}{3};6\right)$

• $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)\Rightarrow\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}<2\sqrt{2}-\sqrt{\frac{11}{3}}$,

$3x^2-14x-8\le-3\Rightarrow f(x)<0,\forall x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

• $x\in\left[\frac{7}{3};6\right)$: $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{7}{3};6\right)$ và $f(5)=0$.

Do đó trên $\left[\frac{7}{3};6\right)$ phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm $x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 2: Phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2-14x-5=0$

$\Leftrightarrow\frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$ (*)

Vì $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0,\ x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]$ nên phương trình

$(*)\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

4. Điều kiện: $-1\le x\le\frac{5}{2}$.

Dễ thấy, $x=-1$ hoặc $x=\frac{5}{2}$ không là nghiệm phương trình.

Phương trình đã cho viết lại: $\left(\sqrt{3x+3}-3\right)-\left(\sqrt{5-2x}-1\right)-(x-2)\left(x^2-x-12\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1}-(x-2)\left(x^2-x-12\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-2)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-x^2+x+12\right]=0$

Xét hàm số $f(x)=-x^2+x+12$, với $x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x)=-2x+1$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\min\limits_{x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)} f=f\left(\frac{5}{2}\right)>0$, do đó $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-x^2+x+12>0$, mọi $x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $2(x-2)\left(\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}\right)=3x-1$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{5}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương: $\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}=\frac{3x-1}{2x-4}$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}-\frac{3x-1}{2x-4}=0$

Đặt $f(x)=\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}-\frac{3x-1}{2x-4}$ với x thuộc $\left[\frac{5}{2};-\infty\right)$

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}}+\frac{10}{(2x-4)^2}>0$ với $\forall x>\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{5}{2};-\infty\right)\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiện

Và $f(3)=0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{2-\sin x}=1$

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Đặt $t=\sin x$, điều kiện $|t|\le1$

Khi đó phương trình có dạng: $\sqrt{3+t}-\sqrt{2-t}=1\Leftrightarrow\sqrt{3+t}=1+\sqrt{2-t}$ (*)

Dễ thấy: + Hàm số $f(t)=\sqrt{3+t}$ là hàm đồng biến trên $D=[-1;1]$

+ Hàm số $g(t)=1+\sqrt{2-t}$ là hàm nghịch biến trên $D=[-1;1]$

Từ (*) suy ra: $f(t)=g(t)$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Ta thấy $t=1$ là thỏa phương trình (*), do đó: $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}\\\sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{x+4}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $-4\le x\le1; y\in\mathbb{R}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có phương trình đầu tương đương

$$2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$, ta có $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình đầu $\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ y^2=1-x\end{cases}$

Thế vào phương trình thứ hai ta được $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=4+\sqrt{x+4}$ (*)

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{x+4}$, liên tục trên [-4;1],

Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}<0\ \forall x\in(-4;1)\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng (-4; 1)

Lại có $g(-3)=4$ nên $x=-3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Với $x=-3$ suy ra $y=2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;2)$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình:

1. $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ *Đề thi Đại học khối A, A1 năm 2012*

2. $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$ *Đề thi ĐH khối A năm 2010.*

Lời giải

Trước hết, đây là bài toán cơ bản và có nhiều cách giải (15 cách giải). Trong khuôn khổ ứng dụng đạo hàm, tác giả giới thiệu đến bạn đọc 3 cách giải đơn giản nhất.

1. **Cách 1:** Hệ phương trình cho viết lại: $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}$

Đặt $u=x-\dfrac{1}{2}, v=y+\dfrac{1}{2}$.

Hệ đã cho thành $\begin{cases}u^3-\dfrac{3}{2}u^2-\dfrac{45}{4}u=(v+1)^3-\dfrac{3}{2}(v+1)^2-\dfrac{45}{4}(v+1)\\ u^2+v^2=1\end{cases}$

Xét hàm $f(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{45}{4}t$ với $|t|\le 1$

Ta có $f'(t)=3t^2-3t-\dfrac{45}{4}<0$ với mọi $t\in[-1;1]$

$\Rightarrow f(u)=f(v+1)\Rightarrow u=v+1\Rightarrow(v+1)^2+v^2=1\Rightarrow\begin{cases}v=0\\ u=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}v=-1\\ u=0\end{cases}$

Với $\begin{cases}v=0\\ u=1\end{cases}\Rightarrow(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ Với $\begin{cases}v=-1\\ u=0\end{cases}\Rightarrow(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Cách 2:

Ta có: $x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\Leftrightarrow(x-1)^3-12x+24=(y+1)^3-12y$

$\Leftrightarrow(x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)$ (1)

$x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1$ (2)

Từ (2) nhận thấy $\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\le 1\\ \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-\dfrac{1}{2}\le 1\\ -1\le y+\dfrac{1}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le x-1\le\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\le y+1\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Từ (1), xét $f(t)=t^3-12t$ với $t\in(-2;2)\Rightarrow f'(t)=3t^2-12<0, \forall t\in(-2;2)$

(vì $x-1, y+1\in(-2;2)$) nên $\Leftrightarrow x=y+2$. Thay $x=y+2$ vào (2) ta được:

$(y+2)^2+y^2-(y+2)+y=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 4y^2+8y+3=0\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}; x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $y=-\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{3}{2}$

Hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Cách 3:

Ta có hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases}(x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}$

Đặt $a=x-1, b=y+1$ ta được hệ: $\begin{cases}a^3-12a=b^3-12b\\ \left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}$

Từ $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2=1\Rightarrow\begin{cases}-1\le a+\dfrac{1}{2}\le 1\\ -1\le b-\dfrac{1}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\le b\le\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\le\dfrac{9}{4}\\ b^2\le\dfrac{9}{4}\end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$, ta có $f(t)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$f'(t)=3(t^2-4)<0$, với $t^2\le\frac{9}{4}$. Nên từ $a^3-12a=b^3-12b$ ta có $a=b$.

Do đó, hệ đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

2. Điều kiện: $x\le\frac{3}{4},y\le\frac{5}{2}$.

Cách 1: $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\Leftrightarrow(4x^2+1)2x+2(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

$\Leftrightarrow(4x^2+1)2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}$ có dạng $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)$

Xét hàm số $f(t)=t(t^2+1)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\\ y=\frac{5-4x^2}{2}\end{cases}$

Khi đó (2) viết lại $4x^2+\left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7\ (3)$.

Vì $x=0,x=\frac{3}{4}$ không là nghiệm của (3).

Xét hàm số: $g(x)=4x^2+\left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ liên tục trên khoảng $\left(0;\frac{3}{4}\right)$.

Ta có $g'(x)=32x(x^2-1)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0,\forall x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{4}\right)$ và $g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow(3)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2$.

Chú ý 1: Ta có thể đặt: $u=2x\Rightarrow u\le\frac{3}{2},v=\sqrt{5-2y},v\ge0\Rightarrow y=\frac{5-v^2}{2}$

Phương trình $(1)\Rightarrow(u^2+1)\frac{u}{2}-\left(\frac{v^2+1}{2}\right)v=0\Leftrightarrow(u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0$

$\Leftrightarrow u=v\Rightarrow 2x=\sqrt{5-2y}$ vì $u^2+uv+v^2+1>0,\forall u,v\in\mathbb{R}$.

Chú ý 2: Đặt: $\sqrt{5-2y}=t\Leftrightarrow y=\frac{5-t^2}{2}$ với $t\ge0$

Khi đó $(1)\Rightarrow(4x^2+1)x=\left(\frac{t^2+1}{2}\right)t\Leftrightarrow 8x^3+2x=t^3+t$

$\Leftrightarrow(2x-t)(4x^2+2xt+t^2+1)=0\Rightarrow t=2x\Rightarrow t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$

(2) trở thành $t^2+\frac{(5-t^2)^2}{4}+2\sqrt{3-2t}=7\Leftrightarrow t^4-6t^2+8\sqrt{3-2t}-3=0\ (*)$

Vì $t=0$ hoặc $t=\frac{3}{2}$ không là nghiệm phương trình (*)

Xét hàm: $f(t)=t^4-6t^2+8\sqrt{3-2t}-3$ liên tục trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Ta có: $f'(t)=4t^3-12t-\frac{8}{\sqrt{3-2t}}<0,\forall t\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và $f(1)=0$ nên trong khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và

$f(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=1\Rightarrow x=\frac{1}{2},y=2$.

Cách 2: Đặt $u=2x,v=\sqrt{5-2y}$ Từ $(1)\Rightarrow(u^2+1)u-(v^2+1)v=0\Rightarrow u=v$

Ta có hệ: $\begin{cases}2x=\sqrt{5-2y}\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\ (2)\end{cases}$

Với $t=y-1,w=\sqrt{3-4x}=\sqrt{3-2u}$

$\Rightarrow\begin{cases}u=\sqrt{3-2t}\ge0\\ t^2=3-2w\\ w=\sqrt{3-2u}\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=3-2t\\ t^2=3-2w\\ w^2=3-2u\end{cases}\Rightarrow u=t=w=1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$

Cách 3: Điều kiện: $x\le\frac{3}{4},y\le\frac{5}{2}$

$(1)\Leftrightarrow 4x^3+x=\left(\frac{\sqrt{5-2y}}{2}\right)^3+\frac{\sqrt{5-2y}}{2}\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le\frac{3}{4}\\ y=\frac{5-4x^2}{2}\end{cases}$.

$(2)\Leftrightarrow 4x^2+\left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7\Leftrightarrow 16x^4-24x^2+8\sqrt{3-4x}-3=0$

$\Leftrightarrow 16x^4-24x^2+5+8\left(\sqrt{3-4x}-1\right)=0\Leftrightarrow(4x^2-1)(4x^2-5)+\frac{16(1-2x)}{\sqrt{3-4x}+1}=0$

$\Leftrightarrow(2x-1)\left[(2x+1)(4x^2-5)-\frac{16}{\sqrt{3-4x}+1}\right]=0\quad(3)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$0\le x\le\frac{3}{4}\Rightarrow(2x+1)\left(4x^2-5\right)<0\Rightarrow(2x+1)\left(4x^2-5\right)-\frac{16}{\sqrt{3-4x}+1}<0$

$(3)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{y-1}+3y\\(x+y)(2x-y)+4=-6x-3y\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{3},y\ge1$

Phương trình thứ hai tương đương với: $-y^2+(x+3)y+2x^2+6x+4=0,\Delta=(3x+5)^2$

Nên có $y+x+1=0$ (vô nghiệm vì $x\ge\frac{1}{3},y\ge1$) hoặc $2x-y+4=0$.

Với $2x-y+4=0\Leftrightarrow y=2x+4$ thay vào phương trình đầu, nên có:

$\sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{2x+3}+3(2x+4)\Leftrightarrow2(3x-1)+\sqrt{3x-1}=2(2x+3)+\sqrt{2x+3}\,(*)$

Xét hàm số $f(t)=2t^2+t$ với $t\ge0$ ta có $f'(t)=4t+1>0,\forall t\ge0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=12$

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=(4;12)$

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3\left(4y^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6\\x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge0$.

Nhận thấy, $x=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x>0$. Từ phương trình thứ hai ta có $2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,(*)$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ với $\forall t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$, với $\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow2y=\frac{1}{x}$

Thay $2y=\frac{1}{x}$ vào phương trình đầu, ta được: $x^3+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6$

Vế trái của phương trình là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên có nghiệm duy nhất $x=1$ và hệ phương trình có nghiệm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x-2y+\sqrt{2x+y+2xy+1}=1\\\sqrt[3]{3y+1}=8x^3-2y-1,x>0\end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases}2x-2y+\sqrt{2x+y+2xy+1}=1 & (1)\\\sqrt[3]{3y+1}=8x^3-2y-1 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow(2x+1)-2(y+1)+\sqrt{(2x+1)(y+1)}=0$

Điều kiện: $(2x+1)(y+1)\ge0$, mà $x>0\Rightarrow\begin{cases}2x+1>0\\y+1\ge0\end{cases}$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{y+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{y+1}\right)=0\Leftrightarrow y=2x$

Thay vào (2): $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1\Leftrightarrow(6x+1)+\sqrt[3]{6x+1}=(2x)^3+2x$ (3)

Hàm số $f(t)=t^3+t,\ \forall t\in\mathbb{R}$ ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên đồng biến trê $f(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$, do đó (3) $\Leftrightarrow\sqrt[3]{6x+1}=2x\Leftrightarrow4x^3-3x=\frac{1}{2}$

Nhận thấy $x>1$ không là nghiệm của phương trình

Xét $0<x\le1$: Đặt $x=\cos\alpha$ với $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos3\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}\\\alpha=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Do $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{9}$.

Vậy hệ có nghiệm $\left(\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{\pi}{9}\right)$

Ví dụ 9: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}3x^2+2x-1<0\\x^3-3x+1>0\end{cases}$

Lời giải

$3x^2+2x-1<0\Leftrightarrow-1<x<\frac{1}{3}$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$ với $-1<x<\frac{1}{3}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có: $f'(x)=3(x-1)(x+1)<0, \forall x\in\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ và $f(x)>f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}>0, \forall x\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

Vậy, hệ bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2x+1=y^3+y^2+y\\ 2y+1=z^3+z^2+z \quad (*)\\ 2z+1=x^3+x^2+x\end{cases}$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng: $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(y^3+y^2+y-1)\\ y=\frac{1}{2}(z^3+z^2+z-1)\\ z=\frac{1}{2}(x^3+x^2+x-1)\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}(t^3+t^2+t-1)$, $\forall t\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{2}(3t^2+2t+1)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+\frac{2}{3}\right]>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta viết lại hệ phương trình như sau: $\begin{cases}x=f(y)\\ y=f(z)\\ z=f(x)\end{cases}$

Không giảm tổng quát, giả sử: $x=\min\{x,y,z\}$.

Khi đó: $x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y)\Rightarrow z\le x\Rightarrow f(z)\le f(x)\Rightarrow y\le z$. Hay $x\le y\le z\le x \Rightarrow x=y=z$

Với $x=y=z$, xét phương trình: $x^3+x^2-x-1=0\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $S_1=\{-1;-1;-1\}$, $S_2=\{1;1;1\}$.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^2+3x+2=\frac{8}{y}-\sqrt{5y-1}\\ y^2+3y+2=\frac{8}{z}-\sqrt{5z-1}\\ z^2+3z+2=\frac{8}{x}-\sqrt{5x-1}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x,y,z\ge\frac{1}{5}$.

Xét các hàm số $f(t)=t^2+3t+2, g(t)=\frac{8}{t}-\sqrt{5t-1}$.

Khi đó ta có $f'(t)=2t+3>0, g'(t)=-\frac{8}{t^2}-\frac{5}{2\sqrt{5t-1}}<0, \forall t>\frac{1}{5}$.

Mà $f(t), g(t)$ là các hàm số liên tục trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$, $g(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x=\min\{x,y,z\}$.

Nếu $x<y\Rightarrow g(x)>g(y)\Rightarrow f(z)>f(x)\Rightarrow z>x\Rightarrow g(z)<g(x)\Rightarrow f(y)<f(z)$ suy $y<z\Rightarrow g(y)>g(z)\Rightarrow f(x)>f(y)\Rightarrow x>y$, vô lí vì $x<y$.

Do vậy $x=y$, tương tự lí luận như trên ta được $x=z$ suy ra $x=y=z$. Thay trở hệ ta được $x^2+3x+2=\frac{8}{x}-\sqrt{5x-1}\Leftrightarrow x^2+3x+2-\frac{8}{x}+\sqrt{5x-1}=0$ (1).

Đặt $h(x)=x^2+3x+2-\frac{8}{x}+\sqrt{5x-1}$, $x\in\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Ta thấy hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$ và $h(1)=0\Rightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x=y=z=1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải phương trình:

1. $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13$
2. $\sqrt{x^3+3x}+x^2+4x-7=0$
3. $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$
4. $27x^3-27x^2+13x-2=2\sqrt[3]{2x-1}$

Bài 2: Giải phương trình: $(x+1)^3-\sqrt{(5x-x^2)^3}=3\sqrt{5x-x^2}-3(x+1)$

Bài 3: Giải phương trình:

1. $24x^2-60x+36-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$
2. $\sqrt[3]{\frac{x^9+9x^2-1}{3}}=2x+1$
3. $\sqrt[3]{x-2}=8x^3-60x^2+151x-128$
4. $\sqrt[3]{7x^2+9x-4}=x^3-4x^2-5x+6$

http://sachxua.edu.vn

5. $\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}=x^3-6x^2+12x-7$

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2+2+\left(y^2+2\right)\sqrt{1-y^2}=0 \\ \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1 \end{cases}$

Bài 5: Giải hệ phương trình:

1. $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2+2y^2=x+4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^3+y^3=91 \\ 4x^2+3y^2=16x+9y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x^3-2y^3=3\left(x^2-4y^2\right)-4(x-8y) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x=2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$

Bài 6: Giải hệ phương trình:

1. $\begin{cases} x^2-3x=y^2+y+1 \\ y^2-3y=x^2+x+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x^3(x+y)+9y=xy^2(x+y)+9x \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^3+y=x^3+3x^2+4x+2 \\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=(y+1)^2 \\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=(x+1)^2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8x^3-y^3-3y^2=5y-4x+3 \\ \sqrt{2x+y+5}+2x=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3(3y+55)=64 \\ xy\left(y^2+3y+3\right)=12+51x \end{cases}$

Dạng 6: Chứng minh phương trình có n nghiệm

Phương pháp.

"Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên D và nếu tồn tại một số âm α sao cho $y(\alpha)<0$ và tồn tại một số dương β sao cho $y(\beta)>0$.

Theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm $c\in(\alpha;\beta)$.

Nếu ta chứng minh được hàm số y đơn điệu (tức đồng biến hoặc nghịch biến) trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Từ đó suy ra rằng phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(\alpha;\beta)$".

Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình: $x^5-5x-5=0$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^5-5x-5$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=5\left(x^4-1\right)=5\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$, vì $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1$

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$f(x)<0,\forall x\le1\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm khi $\forall x\le1$.

Vì $f(1)=-9$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên phương trình có nghiệm $x>1$

Mặt khác: $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó hàm số y cắt trục hoành tại một giao điểm. Vậy, phương trình; $x^5-5x-5=0$ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2. Chứng minh phương trình: $x^5-x^2-2x-1=0$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

$x^5=x^2+2x+1$ hay $x^5=(x+1)^2$

Dễ thấy $x^5\ge0\Rightarrow x\ge0\Rightarrow x+1\ge1\Rightarrow(x+1)^2\ge1$ tức $x^5\ge1$ hay $x\ge1$. Xét hàm số $y=x^5-x^2-2x-1$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Dễ thấy $y(1).y(2)<0\Rightarrow$ phương trình $x^5-x^2-2x-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$, hơn nữa hàm số y đồng biến ($y'>0,\ \forall x\in(1;2)$) trong khoảng này. Như vậy, phương trình $x^5-x^2-2x-1=0$ có nghiệm duy nhất và nghiệm đó thuộc khoảng $(1;2)$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình: $\frac{1}{5}x^5+x^3-4x-3=0$ có nghiệm duy nhất và nghiệm đó thuộc khoảng $(1;2)$

Lời giải

Xét hàm số $y=\frac{1}{5}x^5+x^3-4x-3$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^4+3x^2-4$ và $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\to y(-1)=-\frac{1}{5} \\ x=1\to y(1)=-\frac{29}{5} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên, suy ra: $y<0,\forall x\le1\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm khi $x\le1$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Mặt khác $y(1)=-\frac{29}{5}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, do đó phương trình đã cho có nghiệm $x>1$, hơn nữa $y(2)=\frac{17}{5}>0\Rightarrow y(1)y(2)<0\Rightarrow$ phương trình $\frac{1}{5}x^5+x^3-4x-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Hơn nữa y đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó hàm số y cắt trục hoành tại 1 giao điểm có hoành độ $x\in(1;2)$.

Vậy, phương trình: $\frac{1}{5}x^5+x^3-4x-3=0$ có một nghiệm duy nhất và nghiệm đó thuộc khoảng $(1;2)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng phương trình:

1. $x^5-5x-5=0$ có nghiệm duy nhất.
2. $2x^2\sqrt{x-2}=11$ có nghiệm duy nhất.
3. $x^5+\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}-2012=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.
4. $\frac{2}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x-1=0$ có nghiệm duy nhất và nghiệm đó thuộc $(-1;1)$.
5. $\frac{2}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x-1=0$ có ba nghiệm phân biệt.
6. $x^5-5x^4+15x^3-x^2+3x-7=0$ có nghiệm thực duy nhất.
7. $x^{2012}-2x^3=x^6+1$ có đúng một nghiệm thực dương.

Bài 2: Chứng minh rằng phương trình: $\sqrt{x^2+1}+x^4-2x^2+1-x^5=0$ có đúng một nghiệm.

Dạng 7: Chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp.

Cách 1: Biến đổi BĐT đã cho về dạng $f(x)>0$ (<0,..) với $x\in D$.

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ với $x\in D$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Biến đổi BĐT đã cho về dạng $f(a)\ge f(b)$.

Nếu $a\ge b$ thì chứng minh $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[b;a]$.

Nếu $a\le b$ thì chứng minh $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $[a;b]$.

Chú ý: Khi chứng minh bất đẳng thức có dạng $f(x)\ge k$, $\forall x\in[a;b]$

* Nếu $k=f(a)$ ta chứng minh hàm f đồng biến trên $(a;b)$

* Nếu $k=f(b)$ ta chứng minh hàm f nghịch biến trên $(a;b)$.

Bài toán 01: ỨNG DỤNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $\frac{1}{3}<\sin 20^0<\frac{7}{20}$.

Lời giải

Đặt $a=\sin 20^0\Rightarrow 0<a<\sin 30^0\Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0=\sin 3.20^0=3\sin 20^0-4\sin^3 20^0\Rightarrow 3a-4a^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 4a^3-3a+\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow a$ là nghiệm của phương trình: $4x^3-3x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

Xét đa thức: $f(x)=4x^3-3x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $f(-1)=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}<0$

$f'(x)=3(4x^2-1)$ với $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\to f'(x)<0$

$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}>0\Rightarrow f(-1)f(0)<0$ Bởi vì $f(x)$ liên tục trên toàn trục số.Do đó đa thứ $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $(-1;0)$

Lại có: $\begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{27\sqrt{3}-46}{54}>0 \\ f\left(\frac{7}{20}\right)=\frac{1000\sqrt{3}-1757}{2000}<0 \end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{7}{20}\right)<0$

$\Rightarrow$ đa thức $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{20}\right)$

Lại có: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{2}<0$ và $f(1)=\frac{\sqrt{3}+2}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$

$\Rightarrow$ đa thức $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Bởi vì $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a$ là nghiệm thực trên khoảng $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{20}\right)\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng:

1. $\sin x\le x$ với $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ 2. $\sin x+\tan x>2x$ với $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. Xét hàm số $f(x)=\sin x-x$ liên tục trên đoạn $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có: $f'(x)=\cos x-1\le 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $f(x)\le f(0)=0\Leftrightarrow \sin x\le x,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (đpcm).

2. Xét hàm số $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $f(x)>f(0)$, $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Ví dụ 3: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có:

$$1+\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B\le\frac{13}{12}(\cos A+\cos B+\cos C)+\cos A\cos B\cos C$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$1-2\cos A\cos B\cos C+2(\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B)+1\le\frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2(\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B)+1\le\frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow(\cos A+\cos B+\cos C)^2+1\le\frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}\le\frac{13}{6}.$$

Đặt $t=\cos A+\cos B+\cos C\Rightarrow 1<t\le\frac{3}{2}$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t+\frac{1}{t}$ với $t\in\left(1;\frac{3}{2}\right]$

Ta có: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}>0\ \forall t\in\left(1;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

$$\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{6}\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Ví dụ 4: Tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng:

$$3\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)+8R\sin A\sin B\sin C\ge\frac{13}{4R^2}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$3.4R^2\sin^2 A+3.4R^2\sin^2 B+3.4R^2\sin^2 C+4(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)\ge 13$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2+4abc\ge 13$$

Do vai trò của a,b,c là như nhau nên ta có thể giả sử $a\le b\le c$

Theo giả thiết: $a+b+c=3\Rightarrow a+b>c\Rightarrow 3-c>c\Rightarrow 1\le c<\frac{3}{2}$

Ta biến đổi: $T=3a^2+3b^2+3c^2+4abc=3\left(a^2+b^2\right)+3c^2+4abc$

$$=3\left[(a+b)^2-2ab\right]+3c^2+4abc=3(3-c)^2+3c^2+4abc-6ab$$

$$=3(3-c)^2+3c^2+2ab(2c-3)=3(3-c)^2+3c^2-2ab(3-2c)$$

Vì $c<\frac{3}{2}\Rightarrow 2c-3<0\Rightarrow 3-2c>0$ và $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{3-c}{2}\right)^2\Rightarrow -2ab\ge-2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$

Do đó: $T\ge 3(3-c)^2+3c^2-2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2(3-2c)=c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}=f(c)$.

Xét $f(c)=c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}$ với $1\le c<\frac{3}{2}$

Ta có: $f'(c)=3c^2-3c\ge 0\ \forall c\in\left[1;\frac{3}{2}\right)\Rightarrow f(c)$ đồng biến trên khoảng đó.

$$\Rightarrow f(c)\ge f(1)=13\Rightarrow \text{đpcm}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta luôn có:

1. $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$
2. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$
3. $\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$
4. $2^{2\sin x}+2^{\tan x}>2^{2^{\frac{3}{2}x+1}}$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\left|3x-x^3\right|\le 2,\ \forall x\in[-2;2]$.

Bài 3: Chứng minh rằng:

1. $\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}$ với $0<a<b<\frac{\pi}{2}$
2. $\tan x+\sin x\ge 3x\ \ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. $1-\frac{x^2}{2}\le \cos x$ với $\forall x\in \mathbb{R}$ **4.** $3\sin x+6\tan x+2\tan^3 x-9x>0$ $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\sin x > x-\frac{x^3}{3!}$ $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 5: Chứng minh rằng:

1. $\frac{3}{1+2\cos x}<\frac{\tan x}{x}<\frac{3}{\cos x(4-\cos x)}$ với $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\sin(\cos x)<\cos(\sin x)$ $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

3. $a^{\alpha}-b^{\alpha}+c^{\alpha}\ge(a-b+c)^{\alpha}$ với $a\ge b\ge c\ge 0,\alpha\ge 1$.

4. $4(\sin a-\sin b)+6(\tan a-\tan b)-10(a-b)>0$, biết a, b là hai số thực thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $a>b$.

5. Cho a,b,c là ba số thực thỏa điều kiện $a\le 6$, $b\le -8$, $c\le 3$.

Chứng minh rằng $\forall x\ge 1, x^4-ax^2-bx\ge c$.

Bài 6: Cho các số thực $x,y,z\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 y}+\frac{1}{\sin^2 z}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\le 3-\frac{12}{\pi^2}$.

Bài 7:

1. Chứng minh rằng: nếu tam giác ABC thoả mãn hệ thức

$\cos A+\cos B+\cos C+\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{13}{6}$ thì tam giác ABC đều.

2. Cho tam giác ABC có $A>B>C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$M=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}-1$.

Bài 8: Cho ΔABC bất kì. Chứng minh rằng:

1. $\frac{r^2}{S}+\frac{p}{r}\ge\frac{28}{3\sqrt{3}}$ **2.** $(2R+a)(2R+b)(2R+c)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

Bài toán 02: ỨNG DỤNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ TRONG TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Phương pháp

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Nếu f đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{x\in[a;b]} f=f(a)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f=f(b)$.

Nếu f nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{x\in[a;b]} f=f(b)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f=f(a)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho x,y là các số không âm thoả mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}$.

Lời giải

$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{x^2+x+y^2+y}{xy+x+y+1}=\frac{(x+y)^2-2xy+x+y}{xy+x+y+1}=\frac{2-2xy}{2+xy}$

(vì $x+y=1$). Đặt $t=xy\Rightarrow 0\le t\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2-2t}{2+t}, t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Ta có $f'(t)=\frac{-6}{(2+t)^2}<0,\forall t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$

Vậy $\min\limits_{0\le t\le\frac{1}{4}} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}$, $\max\limits_{0\le t\le\frac{1}{4}} f(t)=f(0)=1$

$\min P=\frac{2}{3}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$ và $\max P=1$ khi $x=0,y=1$ hoặc $x=1,y=0$

Ví dụ 2: Biết rằng $(x;y)$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y=m\\x^2+y^2=-m^2+6\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=xy-6(x+y)$.

Lời giải

Từ hệ $\begin{cases}x+y=m\\x^2+y^2=-m^2+6\end{cases}$ tương đương với $\begin{cases}x+y=m\\x.y=m^2-3\end{cases}$

Theo định lý Vi-et đảo thì x, y là các nghiệm của phương trình $t^2-tm+m^2-3=0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta\ge 0$ nghĩa là $-3m^2+12\ge 0\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Với $-2\le m\le 2$ thì hệ cho có nghiệm $(x;y)$ và $F=m^2-6m-3$

Dễ thấy, $F'=2m-6<0$ với mọi $m\in[-2;2]$

Suy ra F nghịch biến trên đoạn $[-2;2]$ và $F(-2)=13$, $F(2)=-11$.

Vậy, $\min F=-11$ khi $m=2$ và $\max F=13$ khi $m=-2$.

Ví dụ 3. Biết rằng $(x;y)$ là các nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=m\\x^2+y^2=m^2-4m+6\\x\ge 0,y\ge 0;\ 0\le m\le 2\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của: $T=(x+y)^3+6xy(x+y)+39m+2$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

Đặt $S = x + y, P = xy$. Hệ cho trở thành: $\begin{cases} S = m \\ P = 2m - 3 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm khi phương trình: $t^2 - mt + 2m - 3 = 0$ có nghiệm

$\begin{cases} t_1, t_2 \geq 0 \\ 0 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq m \leq 2$ thỏa bài toán.

Khi đó $T = m^3 + 6(2m - 3)m + 39m + 2 = m^3 + 12m^2 + 21m + 2$

Ta xét hàm số $f(m) = m^3 + 12m^2 + 21m + 2$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Ta có $f'(m) = 3m^2 + 24m + 21 > 0,\ \forall m \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \Rightarrow f(m)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ và $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{511}{8}$, $f(2) = 100$

Vậy: $\min T = \min\limits_{m \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]} f(m) = \frac{511}{8}$ khi $m = \frac{3}{2}$ và $\max T = \max\limits_{m \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]} f(m) = 100$ khi $m = 2$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{a + b + c + d}{\sqrt[4]{abcd}} + \frac{\sqrt[4]{abcd}}{a + b + c + d}$$

Bài 2. Cho $x,\ y,\ z$ là 3 số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng: $xyz + xy + yz + zx \leq 4$.

Bài 3. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x \geq 1, y \geq 1$ và $3(x + y) = 4xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$.

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1. Khái niệm cực trị hàm số

Giả sử hàm số xác định trên tập hợp $D (D \subset \mathbb{R})$ và $x_0 \in D$

x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoả $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho: $f\ \begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoản $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho: $\begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tạ điểm x_0.

Như vậy: Điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp D

Điểm cực đại, cực tiểu gọi chung là điểm cực trị của hàm số, $f(x_0)$ là giá trị cực tr (hay cực trị) của hàm số.

Chú ý.

a) *Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f chưa hẳn đã là GTLN (GTNN) của hàm số trên tập xác định D mà $f(x_0)$ chỉ là GTLN (GTNN) của hàm số f trên khoảng $(a,b) \subset D$ v $(a;b)$ chứa x_0.*

b) *Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định D của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.*

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tạ điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm f' ***có thể*** triệt tiêu tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tạ điểm x_0.
- Hàm số ***có thể*** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm
- Hàm số chỉ ***có thể*** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

Nếu $\begin{cases} f'(x_0)<0, x\in(a;x_0) \\ f'(x_0)>0, x\in(x_0;b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nếu $\begin{cases} f'(x_0)>0, x\in(a;x_0) \\ f'(x_0)<0, x\in(x_0;b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Chú ý:

1. Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0;f(x_0))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị* hàm số f.

2. Trong trường hợp $f'(x_0)=0$ không tồn tại hoặc $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)=0 \end{cases}$ thì ***định lý 3*** không dùng được.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài toán 01: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

Phương pháp giải

Tìm tập xác định D của hàm số f.

Tính f'(x).

Tìm nghiệm của phương trình f'(x) = 0 (nếu có) và tìm các điểm $x_0 \in D$ mà tại đó hàm f liên tục nhưng $f'(x_0)$ không tồn tại.

Vận dụng định lý 2 (lập bảng xét dấu f'(x)) hay định lý 3 (tính f''(x)) để xác định điểm cực trị của hàm số.

Chú ý: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D.

Điểm $x=x_0\in D$ là điểm cực trị của hàm số khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây cùng thỏa mãn:

- Tại $x=x_0$ đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại
- Đạo hàm đổi dấu khi x đi qua x_0.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{1-x^2}{x}$ 2. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{2x-4}$

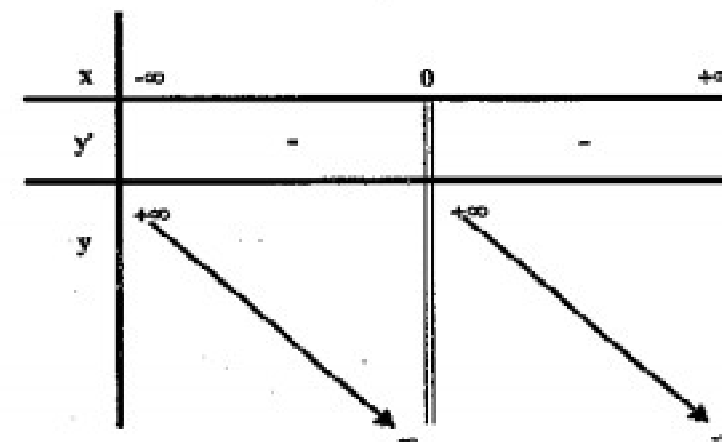
Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ta có: $y'=-1-\dfrac{1}{x^2}<0\ \forall x\in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và không có điểm cực trị.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

Bảng biến thiên

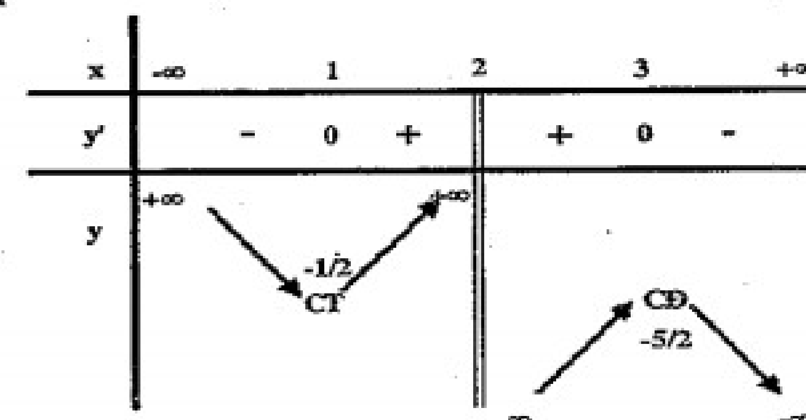


2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có: $y'=\dfrac{-2x^2+8x-6}{(2x-4)^2}$, $\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\to y=-\dfrac{1}{2} \\ x=3\to y=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to2^-}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+}y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực đại tại $x=3$, $y_{CĐ}=-\dfrac{5}{2}$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, $y_{CT}=-\dfrac{1}{2}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 2: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y=-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+1$ 2. $y=(x-2)^3-3x+4$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-x^2+4x-3$, $\forall x\in D: y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\to y(1)=-\frac{1}{3} \\ x=3\to y(3)=1 \end{array}\right.$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	$-1/3$ (y_{CT})	↗	1 ($y_{CĐ}$)	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=-\frac{1}{3}$, hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và $y_{CĐ}=1$.

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3(x-2)^2-3$,

$\forall x\in D: y'=0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2=3 \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\to y(1)=0 \\ x=3\to y(3)=-4 \end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0 ($y_{CĐ}$)	↘	-4 (y_{CT})	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT}=-4$, hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CĐ}=0$.

Ví dụ 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y=-\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{5}{4}$ 2. $y=2x^3+3x+1$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-x^3-2x=-x(x^2+2)$, $\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow x=0; y(0)=\frac{5}{4}$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{4x^4}\right)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{4x^4}\right)=-\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	CĐ $\frac{5}{4}$	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$, $y_{CĐ}=\frac{5}{4}$.

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=6x^2+3>0\ \forall x\in D$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(2+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(2+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Hàm số không có cực trị trên R

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 4: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y=-x^4+2x^2+3$ 2. $y=x^4-2x^2-3$

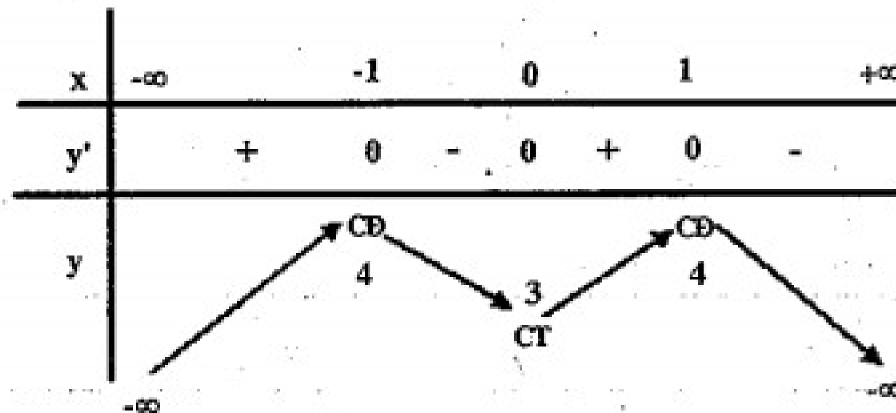
Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)$, $\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y(0)=3\\ x=\pm1\to y(\pm1)=4\end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$, $y_{CT}=3$.

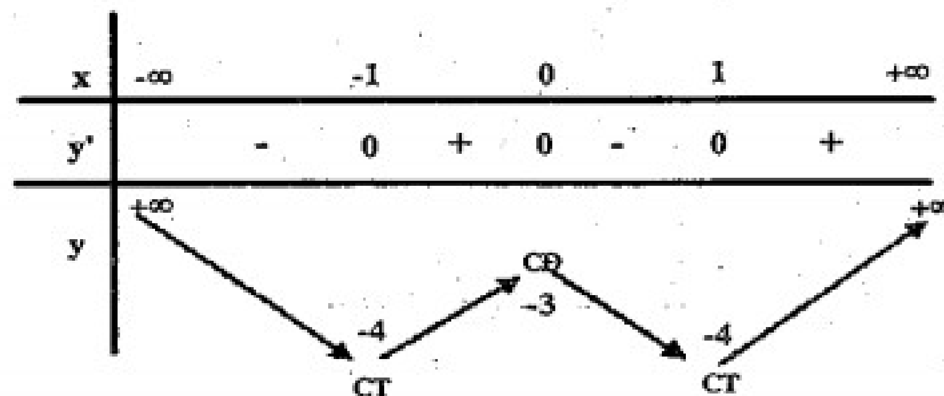
Hàm số đạt cực đại tại hai điểm $x=\pm1$, $y_{CĐ}=4$

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$, $\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y(0)=-3\\ x=\pm1\to y(\pm1)=-4\end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)=+\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$, $y_{CĐ}=-3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x=\pm1$, $y_{CT}=-4$

Ví dụ 5: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y=x^3-\frac{3x^2}{2}-6x+3$ 2. $y=-x^3+\frac{9}{2}x^2-6$

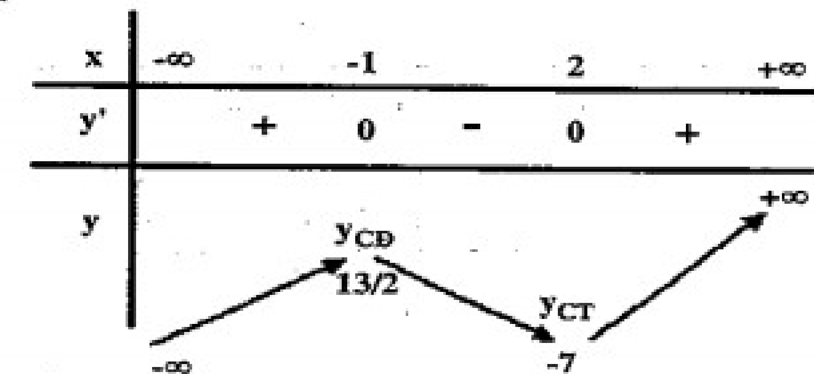
Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-3x-6$, $\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\to y(-1)=\\ x=2\to y(2)=-7\end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=+\infty$

Bảng biến thiên



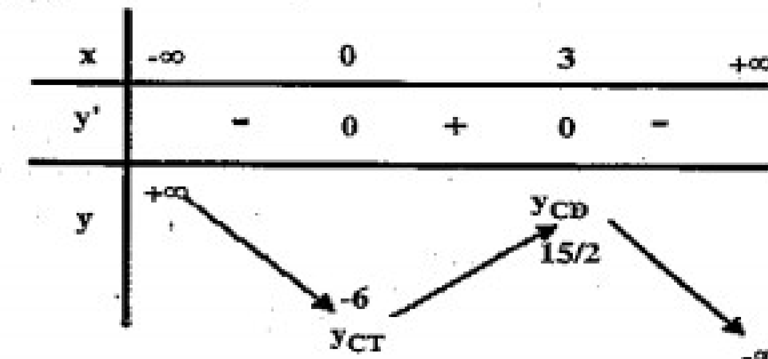
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, $y_{CT}=-7$, hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, $y_{CĐ}=\frac{13}{2}$.

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-3x^2+9x$, $\forall x\in D$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y(0)=-6\\ x=3\to y(3)=\frac{15}{2}\end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\frac{9}{2x}-\frac{6}{x^3}\right)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(-1+\frac{9}{2x}-\frac{6}{x^3}\right)=-\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, $y_{CT}=-6$, hàm số đạt cực đại tại $x=3$, $y_{CĐ}=\frac{15}{2}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm cực trị (nếu có) của hàm số sau: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

Bài 2: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y=-x^3-1,5x^2+6x+1$ **2.** $y=x^3+3x^2+3x+5$

3. $y=\dfrac{x^3}{3}-3.\dfrac{x^2}{2}+2x+4$.

Bài 3: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y=-x^4+2x^2+1$ **3.** $y=-x^4+6x^2-8x+1$

2. $y=-0,25.x^4+x^3-4x+1$

Bài toán 02: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, CHỨA CĂN THỨC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{4-|x|}{4+|x|}$ **2.** $y=|x+3|+\dfrac{1}{x+1}$

Lời giải

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Nếu $x\in[0;+\infty)$ thì $y=\dfrac{4-x}{4+x}\Rightarrow y'=-\dfrac{8}{(4+x)^2}<0,\ \forall x\in[0;+\infty)$

Nếu $x\in(-\infty;0]$ thì $y=\dfrac{4+x}{4-x}\Rightarrow y'=\dfrac{8}{(4-x)^2}>0,\ \forall x\in(-\infty;0]$

Tại $x=0$ thì $y'(0^+)=-\dfrac{1}{2}$, $y'(0^-)=\dfrac{1}{2}$ Vì $y'(0^+)\neq y'(0^-)$ nên $y'(0)$ không tồn tại

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y_{CĐ}=1$

2. $y=|x+3|+\dfrac{1}{x+1}=\begin{cases}x+3+\dfrac{1}{x+1} & \text{khi } x\ge -3\\ -(x+3)+\dfrac{1}{x+1} & \text{khi } x<-3\end{cases}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Nếu $x\ge -3$ thì $y=x+3+\dfrac{1}{x+1}$, ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}$

Và $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2=1\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\pm1\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$

Tại $x=-3$, ta có: $y'(-3^+)=1-\dfrac{1}{(-3+1)^2}=\dfrac{3}{4}$, $y'(-3^-)=-1-\dfrac{1}{(-3+1)^2}=-\dfrac{5}{4}$

Vì $y'(-3^+)\neq y'(-3^-)$ nên $y'(-3)$ không tồn tại

Nếu $x<-3$ thì $y=-(x+3)+\dfrac{1}{x+1}$, ta có: $y'=-1-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0,\ \forall x<-3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
y'		-	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
y	↘		$-\frac{1}{2}$ CT	↗	CĐ 0	↘	‖	↘	4 CT	↗	

Suy ra các điểm cực tiểu của hàm số là $x=-3$, $y_{CT}=-\dfrac{1}{2}$ và $x=0$, $y_{CT}=4$; điểm cực đạ của hàm số là $x=-2$, $y_{CĐ}=0$.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-x+1}\ge0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}\ge -x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1\ge0\\ -x\le0\end{cases}\vee\begin{cases}-x\ge0\\ x^2-x+1\ge(-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x\ge0\end{cases}\vee\begin{cases}x\le0\\ x\le1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge0\vee x\le0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$

$$y'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}}=\frac{1+\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}}=\frac{2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow2\sqrt{x^2-x+1}=1-2x\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x\ge0\\ 4(x^2-x+1)=(1-2x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\ 4=1\end{cases}$$

Vậy phương trình $y'=0$ vô nghiệm, lại có y' luôn tồn tại, suy ra hàm số không cc điểm cực trị.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y=1+|x-1|$ 2. $y=\sqrt{|x|}(x-3)$

Bài 2: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}$ 2. $y=\dfrac{x^2+20}{\sqrt{x+1}}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 3: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = x\sqrt{4-x^2}$ 2. $y = 2x - \sqrt{x^2-3}$

Bài 4: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$ 2. $y = \left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{-x^2+4x-3}$

Bài toán 03: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm cực trị (nếu có) của hàm số: $y = 2\sin 2x - 3$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4\cos 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, $y'' = -8\sin 2x$

$y''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 & \text{khi } k = 2n \\ 8 & \text{khi } k = 2n+1 \end{cases}$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + n\pi; y\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}; y\left(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = -5$

Ví dụ 2: Tìm cực trị (nếu có) của hàm số: $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 2\sin x(2\cos x + 1)$ và $y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

$y''(k\pi) = 2\cos(k\pi) + 4\cos 2(k\pi)$

$y''(k\pi) = 6 > 0$ nếu k chẵn, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm

$x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ và $y(2n\pi) = 0$

$y''(k\pi) = 2 > 0$ nếu k lẻ, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm

$x = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ và $y(2n+1)\pi = 4$.

$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) < 0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ và $y\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{9}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau: $y = \sin^6\frac{x}{4} + \cos^6\frac{x}{4}$

Bài 2: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = \cos x\sqrt{\sin x}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ 2. $y = \left|\cos^3 x + \sin^3 x\right| + 3\sin 2x$

Bài toán 04: TÌM ĐIỂM LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ CỦA SỐ HÀM SỐ

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm các giá trị của m để hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm ở về hai phía khác nhau của đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0;2) \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(2;-2) \end{array}\right.$

$(C_m): (x-m)^2 + (y-2m)^2 = 1$ có tâm $I(m;2m)$ và bán kính $R = 1$

Vì $IB = \sqrt{5m^2+4m+8} = \sqrt{5\left(m+\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} > 1 = R \Rightarrow$ điểm A nằm trong đường tròn $(C_m) \Leftrightarrow IA < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m < 1$.

Ví dụ 2: Cho đồ thị $(C): y = x^4 - 6x^2 + 2x$. Chứng minh rằng (C) có 3 điểm cực trị phân biệt không thẳng hàng. Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm cực trị đó.

Lời giải

Trước hết ta có $y' = 2(2x^3 - 6x + 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 1 = 0$

Xét hàm $g(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $g(-2).g(-1) = -9 < 0$, $g(-1).g(1) = -9 < 0$, $g(1).g(2) = -15 < 0$. Do đó phương trình $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay hàm số có ba cực trị phân biệt.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm cực trị nào đó.

Nên có: $x_0^3 = 3x_0 - \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = x_0^4 - 6x_0^2 + 2x_0 = -3x_0^2 + \frac{3}{2}x_0$.

Suy ra cả ba điểm cực trị đều nằm trên Parabol $y = -3x^2 + \frac{3}{2}x$ nên nó không thẳng hàng

Mặt khác lại có $y_0^2 = (-3x_0^2 + \frac{3}{2}x_0)^2 = 9x_0^4 - 9x_0^3 + \frac{9}{4}x_0^2$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$=9x_0\left(3x_0-\frac{1}{2}\right)-9\left(3x_0-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4}x_0^2=\frac{117}{4}x_0^2-\frac{63}{2}x_0+\frac{9}{2}$$

Suy ra $x_0^2+y_0^2=\frac{121}{4}x_0^2-\frac{63}{2}x_0+\frac{9}{2}=\frac{121}{4}\left(\frac{1}{2}x_0-\frac{y_0}{3}\right)-\frac{63}{2}x_0+\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+\frac{131}{8}x_0+\frac{121}{12}y_0-\frac{9}{2}=0.$$

Vậy các điểm cực trị nằm trên đường tròn $x^2+y^2+\frac{131}{8}x+\frac{121}{12}y-\frac{9}{2}=0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Tìm m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số đã cho cắt đường tròn $(T): x^2+y^2-4x-2y+m=0$ một dây cung có độ dài bằng $\frac{4\sqrt{30}}{5}$.

Bài 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm M, N sao cho tứ giác AMBN là hình thoi.

Bài toán 06: TÌM CỰC TRỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ KHÁC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x=0$ và chứng minh rằng hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, biết rằng hàm số $f(x)$ xác định bởi: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin^2x}-1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$

Lời giải

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2x}-1}{x^2},$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2x}{x^2\left[\sqrt[3]{(1+x\sin^2x)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2x}+1\right]}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\sin x.\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x\sin^2x)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2x}+1}=0$$

Mặt khác $x\neq 0$, ta có: $f(x)=\dfrac{\sin^2x}{\sqrt[3]{(1+x\sin^2x)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2x}+1}\Rightarrow f(x)\geq 0=f(0)$.

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$. Chứng minh rằng $f'(0)=0$ nhưng hàm số $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm 0.

Lời giải

Ta có $\frac{f(x)-f(0)}{x}=x\sin\frac{1}{x}$ với mọi $x\neq 0$.

Với mọi $x\neq 0$: $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq |x|$ và $\lim_{x\to 0}x=0$ nên $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$. Do đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ và $f'(0)=0$.

Lấy một dãy $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, khi đó $f(x_n)=\frac{1}{(2n\pi)^2}\sin 2n\pi=0, \forall n\in\mathbb{R}$.

Giả sử $(a;b)$ là một khoảng bất kỳ chứa điểm 0.

Vì $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ nên với n đủ lớn $x_n\in(a;b)$ và do $f(x_n)=0=f(0), \forall n\in\mathbb{N}$, theo định nghĩa cực trị của hàm số, $x=0$ không phải là một điểm cực trị của $f(x)$.

Dạng 2: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ HOẶC KHÔNG CÓ CỰC TRỊ

Phương pháp.

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,3...)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0.

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i\ (i=1,2,3...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.

– Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

– Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Định m để hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ có cực đại, cực tiểu.

2. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số: $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt, tức phải có:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\ \Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\ 9-3m(m+2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\ -3m^2-6m+9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\ -3<m<1\end{cases}$$

Vậy, với $\begin{cases}m\neq-2\\ -3<m<1\end{cases}$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

2. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=4mx^3-2(m-1)x$ và $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2mx^2+m-1=0\quad(*)\end{array}\right.$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y'=0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó.

Khi đó phương trình $2mx^2+m-1=0$ $(*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ \begin{cases}m\neq0\\ \Delta'=-2m(m-1)\le0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m<0\ \vee\ m\ge1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le0\\ m\ge1\end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số $y=-2x+2+m\sqrt{x^2-4x+5}$ có cực đại

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-2+m\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; $y''=\dfrac{m}{\sqrt{(x^2-4x+5)^3}}$.

+ Nếu $m=0$ thì $y=-2<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

+ $m\neq0$ vì dấu của y'' chỉ phụ thuộc vào m nên để hàm có cực đại thì trước hết $y''<0\Leftrightarrow m<0$. Khi đó hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có nghiệm (1).

Cách 1:

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow2\sqrt{(x-2)^2+1}=m(x-2)$ (2).

Đặt $t=x-2$ thì (2) trở thành:

$$mt=2\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le0\\ (m^2-4)t^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le0\\ t^2=\dfrac{4}{m^2-4}\end{cases}\Rightarrow(1)\text{ có nghiệm}$$

$\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow m<-2$ (Do $m<0$).

Vậy $m<-2$ thì hàm số có cực đại.

Cách 2: Với $m<0$ hàm số đạt cực đại tại $x=x_0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{m(x_0-2)}{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}=2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2}=\frac{m}{2}\quad(1)$$

Với $m<0$ thì $(1)\Rightarrow x_0<2$. Xét hàm số: $f(x_0)=\dfrac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2},x_0<2$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x_0)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2}=-1,\ \lim_{x\to2^-}f(x_0)=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2}=-\infty$$

Ta có $f'(x_0)=\dfrac{-1}{(x_0-2)^2\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}<0,\forall x_0\in(-\infty;2)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2
f'(x)		–	
f(x)	–1	↘	$-\infty$

Phương trình (1) có nghiệm $x_0<2\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}<-1\Leftrightarrow m<-2$

Ví dụ 3: Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2}{x-1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P):y=x^2+x-4$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-m-2}{(x-1)^2},x\neq1$. Đặt $g(x)=x^2-2x-m-2$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1-(-m-2)>0\\ g(1)=-m-3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3>0\\ m\neq-3\end{cases}\Leftrightarrow m>-3$$

http://sachxua.edu.vn

$A\left(1+\sqrt{m+3};m+2+2\sqrt{m+3}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

www.facebook.com/daykem.quynhon

$A\in(P)\Leftrightarrow m+2+2\sqrt{m+3}=\left(1+\sqrt{m+3}\right)^2+1+\sqrt{m+3}-4\Leftrightarrow m=-2$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ (1), m là tham số. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu đồng thời khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị đến gốc tọa độ O bằng 3 lần khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị đến O.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0\Leftrightarrow x=m-1\vee x=m+1$

hàm số có cực đại, cực tiểu $\forall m\in\mathbb{R}$.

Điểm cực đại của đồ thị là $A(m-1;2-2m)$;

Điểm cực tiểu của đồ thị là $B(m+1;-2-2m)$.

$OB=3OA\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^2+(-2-2m)^2}=3\sqrt{(m-1)^2+(2-2m)^2}$

$\Leftrightarrow(m+1)^2+(-2-2m)^2=9\left[(m-1)^2+(2-2m)^2\right]\Leftrightarrow 2m^2-5m+2=0$

$\Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=\frac{1}{2}$

Ví dụ 5: Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số $y=\frac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $y'=\frac{x^2-2x+m^2-3m+3}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}, x\neq1$, $g(x)=x^2-2x+m^2-3m+3$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $g(x)=0, x\neq1$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 1. $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(1)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<2$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $g(x)=0, x\neq1$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{-m^2+3m-2}\Rightarrow y_1=1-m-2\sqrt{-m^2+3m-2}\\x_2=1+\sqrt{-m^2+3m-2}\Rightarrow y_2=1-m+2\sqrt{-m^2+3m-2}\end{array}\right.$

$y_1.y_2=(1-m)^2-4\left(-m^2+3m-2\right)$

$y_1.y_2=5m^2-14m+9=f(m)$ và $f(m)$ có đỉnh $S\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$

Với $1<m<2$, xét $f(m)$ có $m=\frac{7}{5}\in(1;2)\Rightarrow\min\limits_{m\in(1;2)}f(m)=-\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\min y_1.y_2=-\frac{4}{5}$ khi $m=\frac{7}{5}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Tìm m để hàm số: $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị.
2. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số: $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ chỉ có một điểm cực trị.

Bài 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-mx^2+\frac{3}{2}$. Xác định m để đồ thị của hàm số đã cho có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 3: Tìm m để hàm số sau có cực trị:

1. $y=x^3-3(m-1)x^2+3(2m-4)x+m$
2. $y=\frac{x^2+(m-1)x+1}{mx-1}$
3. $y=\frac{x^2+(2m-1)x+m^2+m-3}{x+m}$
4. $y=\frac{x^2+mx-2}{mx-1}$

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM

Phương pháp

Trong dạng toán này ta chỉ xét trường hợp hàm số có đạo hàm tại x_0.

Khi đó để giải bài toán này, ta tiến hành theo hai bước.

Bước 1. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại x_0 là $y'(x_0)=0$, từ điều kiện này ta tìm được giá trị của tham số.

Bước 2. Kiểm lại bằng cách dùng một trong hai quy tắc tìm cực trị, để xét xem giá trị của tham số vừa tìm được có thỏa mãn yêu cầu của bài toán hay không?

Chú ý:

Định lý 3: *Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.*

Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Trong trường hợp $f'(x_0)=0$ không tồn tại hoặc $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f''(x_0)=0\end{cases}$ thì định lý 3 không dùng được.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$, $y''=2x-2m$

Điều kiện cần: $y'(1)=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=2$

Điều kiện đủ:

Với $m=1$ thì $y''(1)=0 \Rightarrow$ hàm số không thể có cực trị.

Với $m=2$ thì $y''(1)=-2<0 \Rightarrow$ hàm số có cực đại tại $x=1$.

Vậy, $m=2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét:

- Nếu trình bày lời giải theo sơ đồ sau: Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases}$

$(*)$ thì lời giải chưa chính xác

Vì dấu hiệu nêu trong *định lí* 3 chỉ phát biểu khi $y''(x_0)\neq 0$. Các bạn sẽ thấy điều đó rõ hơn bằng cách giải bài toán sau:

1. Tìm m để hàm số $y=x^4+3mx^2+m^2+m$ đạt cực tiểu tại $x=0$
2. Tìm m để hàm số $y=-x^3+3(m-2)x^2+(m-4)x+2m-1$ đạt cực đại tại $x=-1$.

- Nếu ta khẳng định được $y''(x_0)\neq 0$ thì ta sử dụng $(*)$ được.

Ví dụ 2: Tìm các hệ số a,b sao cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+ab}{ax+b}$ đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\forall x\neq -\frac{b}{a}, a\neq 0$

Ta có đạo hàm $y'=\frac{a^2x^2+2abx+b^2-a^2b}{(ax+b)^2}$

- Điều kiện cần: Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2-a^2b}{b^2}=0 \\ \frac{16a^2+8ab+b^2-a^2b}{(4a+b)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

- Điều kiện đủ: $\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow y'=\frac{x^2-4x}{(-x+2)^2}$ $\quad y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên: hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$.

Vậy $a=-2, b=4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y=2x^2-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y'=6(x-1)(x-m)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt tức là $m\neq 1$.

Với $m\neq 1$, thì đồ thị của hàm số có các điểm cực trị là $A(1;m^3+3m-1), B(m;3m^2)$.

$AB=\sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2+(3m^2-m^3-3m+1)=2 \Leftrightarrow m=0; m=2$ (thoả điều kiện).

Vậy, $m=0; m=2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{x^2-2(m+1)x+m^2+4m}{x+2}$. Tìm giá trị của tham số thực m sao cho hàm số có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn: $OA^2+OB^2=120$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

Ta có: $y'(x)=\frac{x^2+4x+4-m^2}{(x+2)^2}=\frac{g(x)}{(x+2)^2}$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm tức là $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

Nghĩa là phải có: $\begin{cases} \Delta'=m^2>0 \\ g(-2)=m^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow m\neq 0.$

Khi đó hai điểm cực trị là $A(-2-m;-2)$, $B(-2+m;4m-2)$

$\overrightarrow{OA}=(-2-m;-2)\Rightarrow OA^2=(-2-m)^2+(-2)^2$,

$\overrightarrow{OB}=(-2+m;4m-2)\Rightarrow OB^2=(-2+m)^2+(4m-2)^2$

$\Rightarrow OA^2+OB^2=18m^2-16m+16=120 \Leftrightarrow m=-2$ hoặc $m=\frac{26}{9}$ thỏa điều kiện $m\neq 0$

Vậy, $m=-2$ hoặc $m=\frac{26}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 5: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho AB nhỏ nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 1$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2.

Giả sử các điểm cực trị của hàm số là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có: $y = \frac{1}{3}(x - m).y' - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1$ *(bạn đọc xem thêm bài toán 03, dạng toán 03)*

$\Rightarrow y_1 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1; \quad y_2 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1$

Suy ra: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (4m^2 + 4)\left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] \geq 4\left(1 + \frac{4}{9}\right)$

$\Rightarrow AB \geq \frac{2\sqrt{13}}{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 0$. Vậy, $\min AB = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ khi $m = 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - m^3 - 3m^2 + m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm này không đổi

2. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$, chứng minh rằng với mọi m, đồ thị (C_m) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

3. Chứng minh rằng với mọi tham số m hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ luôn có cực đại và cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số không đổi.

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1. $y = \frac{x^3}{3} + (2m - 1)x^2 + (m - 9)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

2. $y = mx^3 + 2(m - 1)x^2 - (m + 2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

3. $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

4. $y = \frac{x^2 + (m - 1)x + 3 - 2m}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Bài 3:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để đồ thị của hàm số có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

2. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tiếp xúc với đường tròn $(x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$.

3. $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O.

Bài 4: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = \frac{mx^2 - 1}{x}$ có hai điểm cực trị A, B và đoạn AB ngắn nhất.

Dạng 3: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp. Tiến hành theo các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số f.

Bước 2. Tính $f'(x)$.

Bước 3. Sử dụng định lí sau: "Nếu hàm số f có đạo hàm liên tục trên (a,b) và $x_0 \in (a;b)$. Thế thì điểm x_0 là điểm cực trị của hàm số f nếu và chỉ nếu đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0".

Bước 4. Giải quyết yêu cầu của cực trị (nếu có).

Chú ý:

* Nếu ta gặp biểu thức đối xứng của hoành độ các điểm cực trị và hoành độ các điểm cực trị là nghiệm của một tam thức bậc hai thì ta sử dụng định lí Vi-ét.

* Khi tính giá trị cực trị của hàm số qua điểm cực trị ta thường dùng các kết quả sau:

Định lí 1: Cho hàm đa thức $y = P(x)$, giả sử $y = (ax + b)P'(x) + h(x)$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số là: $y(x_0) = h(x_0)$ và $y = h(x)$ gọi là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số, vì $P(x)$ là hàm đa thức nên $P'(x_0) = 0 \Rightarrow y(x_0) = (ax_0 + b)P'(x_0) + h(x_0) = h(x_0)$ (đpcm).

Định lí 2: Cho hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số: $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

http://sachxua.edu.vn

Và $y=\frac{u'(x)}{v'(x)}$ là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Ta có $y'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow u'(x)v(x)-v'(x)u(x)=0$ $(*)$. Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số thì x_0 là nghiệm của phương trình $(*)$ $\Rightarrow \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=y(x_0)$.

Bài toán 01:
TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ CÙNG DẤU, TRÁI DẤU

Phương pháp.

Giả sử $y'=ax^2+bx+c$

* Hàm số có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt:
$0<x_1<x_2\Leftrightarrow a\neq 0,\ \Delta>0,\ x_1+x_2>0,\ x_1.x_2>0$.
* Hàm số có hai điểm cực trị âm $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm âm phân biệt
$x_1<x_2<0\Leftrightarrow a\neq 0,\ \Delta>0,\ x_1+x_2<0,\ x_1.x_2>0$.
* Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu
$x_1<0<x_2\Leftrightarrow a\neq 0,\Delta>0,\ x_1.x_2<0$.
* Hàm số có hai cực trị có giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow\begin{cases}y \text{ có 2 nghiệm}\\ y_1y_2>0\end{cases}$.

Ví dụ: Định m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ có 2 cực trị trái dấu.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số có cực trị trái dấu nhau khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<0<x_2$ $\Leftrightarrow\begin{cases}9(m^2-1)<0\Leftrightarrow -1<m<1\\ 18-9m^2>0\end{cases}$

Vậy, với $-1<m<1$ thì hàm số có cực trị trái dấu nhau.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm m để hàm số:

1. $y=\frac{mx^3}{3}-mx^2+x-1$ có hai điểm cực trị và hai giá trị cực trị cùng dấu.
2. $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$ đạt cực đại và cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu.
3. $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+6m-2$ có hai cực trị trái dấu.

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1. $y=\frac{x^3}{3}+(m+1)x^2+(6-2m)x+m$ đạt cực trị tại hai điểm trái dấu.
2. $y=(m+1)x^3-3(m+1)x^2+2mx-m$ có các điểm cực đại, cực tiểu. Chứng minh rằng khi đó hai điểm cực trị luôn cách đều đường thẳng $d:x=1$.
3. $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-m$ có cực đại và cực tiểu đồng thời giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số trái dấu nhau.

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU NẰM VỀ MỘT PHÍA, HAI PHÍA CỦA HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Phương pháp

Giả sử $y'=ax^2+bx+c$

* Hàm số có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow y_1.y_2<0$.
* Hàm số có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục tung $\Leftrightarrow x_1.x_2<0$.
* Hàm số có hai cực trị nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow y_1+y_2>0,\ y_1.y_2>0$.
* Hàm số có hai cực trị nằm phía dưới trục hoành $\Leftrightarrow y_1+y_2<0,\ y_1.y_2>0$.
* Hàm số có cực trị tiếp xúc với trục hoành $\Leftrightarrow y_1.y_2=0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$x^3+3x^2+mx+m-2=0$ (1) $\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $g(x)=x^2+2x+m-2=0$ (2)

(C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành khi (1) có 3 nghiệm phân biệt tức phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=3-m>0\\ g(-1)=m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<3$

Vậy, với $m<3$ thì hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=x^2-2mx+2m-1$

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng phía đối với trục tung

$\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-2m+1>0\\ 2m-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy, với $\frac{1}{2}<m\neq 1$ thì hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

Vậy, với $1<m<2$ có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-4$. Tìm các giá trị của m để tất cả các điểm cực trị của đồ thị đều nằm trên các trục toạ độ.

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1. $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có điểm cực đại và cực tiểu và các điểm này cách đều trục tung.

2. $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$ có hai điểm cực đại, cực tiểu và hai điểm đó nằm về hai phía với trục Ox.

Bài 3: Với giá trị nào của $m\in\mathbb{R}$ thì đồ thị của hàm số

$y=\dfrac{mx^2+(m^2+1)x+4m^3+m}{x+m}$ tương ứng có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ.

Bài toán 03: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU NẰM VỀ MỘT PHÍA, HAI PHÍA CỦA ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp

1. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đối xứng qua đường thẳng d cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Gọi I là trung điểm của AB.

– Giải điều kiện: $\begin{cases}\Delta\perp d\\ I\in d\end{cases}$

2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $d(A,d)=d(B,d)$.

3. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và khoảng cách giữa hai điểm A, B là lớn nhất (nhỏ nhất).

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B (có thể dùng phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị).

– Tính AB. Dùng phương pháp hàm số để tìm GTLN (GTNN) của AB.

Cực trị hàm đa thức bậc 3:

1. Hàm số: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

2. Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$

3. Điều kiện tồn tại cực trị

Hàm số có cực đại, cực tiểu ⇔ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hoành độ x_1,x_2 của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y'=0$.

4. Kĩ năng tính nhanh cực trị

Giả sử $\Delta'=b^2-3ac>0$ khi đó $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 với

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ và hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2

Theo định nghĩa ta có các cực trị của hàm số là:

$y_1=y(x_1)=y\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)$; $y_2=y(x_2)=y\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)$

Để viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu, ta có thể sử dụng phương pháp tách đạo hàm.

Bước 1: Thực hiện phép chia y cho y' ta có: $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{b}{9a}\right)y'+\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+\left(d-\frac{bc}{9a}\right)$

hay $y=y'.q(x)+r(x)$ với bậc $r(x)=1$

Bước 2: Do $\begin{cases}y'(x_1)=0\\ y'(x_2)=0\end{cases}$ nên $\begin{cases}y_1=y(x_1)=r(x_1)=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x_1+\left(d-\frac{bc}{9a}\right)\\ y_2=y(x_2)=r(x_2)=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x_2+\left(d-\frac{bc}{9a}\right)\end{cases}$

Hệ quả:

Đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu có phương trình là: $y=r(x)$

Đối với hàm số tổng quát: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ thì đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu có phương trình: $y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+\left(d-\frac{bc}{9a}\right)$

Chú ý: Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d_1: y=k_1x+b_1$, $d_2: y=k_2x+b_2$

thì $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

1. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu song song (vuông góc) với đường thẳng $d: y = px + q$.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $k = p$ (hoặc $k = -\frac{1}{p}$).

2. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu tạo với đường thẳng $d: y = px + q$ một góc α.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $\left|\frac{k-p}{1+kp}\right| = \tan\alpha$. (Đặc biệt nếu $d \equiv Ox$, thì giải điều kiện: $|k| = \tan\alpha$)

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6mx$

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0; -3m-1)$, $B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3)$

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

Đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ có một VTCP $\vec{u} = (8; -1)$.

A và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 2$

Vậy, với $m = 2$ thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

Chú ý: Bài toán có thể yêu cầu như sau:

"Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm trên đồ thị hàm số điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$".

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow y_1 = y(x_1) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$; $y_2 = y(x_2) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ: $y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow$ xảy ra 1 trong 2 trường hợp:

TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right) = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2}$ (thỏa mãn)

TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = x - 1$

$\Leftrightarrow y_I = x_I - 1 \Leftrightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)(x_1 + x_2) + 2\left(2 - \frac{m}{3}\right) = (x_1 + x_2) - 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} + 2\right) = 2 - \frac{m}{3} \Leftrightarrow m = 0$

Vậy, các giá trị cần tìm của m là: $m = -\frac{9}{2}$, $m = 0$ thì đồ thị của hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng d: $y = -4x + 3$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow\ y_1=y(x_1)=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_1+\left(2-\frac{m}{3}\right);\ y_2=y(x_2)=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_2+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là d:

$y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với d: $y=-4x+3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\left(\frac{2m}{3}+2\right)=-4\\ \left(2-\frac{m}{3}\right)\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn)

Vậy, $m=3$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng d: $x+4y-5=0$ một góc 45^0.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-6x-m$

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ $\Leftrightarrow \Delta'=9+3m>0\Leftrightarrow m>-3$

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow\ y_1=y(x_1)=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_1+\left(2-\frac{m}{3}\right);\ y_2=y(x_2)=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_2+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ:

$y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

Đặt $k=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)$. Đường thẳng $d: x+4y-5=0$ có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.

Ta có: $\tan 45^o=\left|\frac{k+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}k}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}k\\ k+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\frac{3}{5}\\ k=-\frac{5}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{39}{10}\\ m=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, suy ra giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{1}{2}$

Vậy, với $m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^3+6mx^2+9x+2m$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2+12mx+9$

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt, tức phải có:

$\Delta'=9(4m^2-3)>0\Leftrightarrow m>\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m<\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (*)

Khi đó ta có: $y=\left(\frac{x}{3}+\frac{2m}{3}\right).y'+(6-8m^2)x-4m\Rightarrow$ đường thẳng đi qua 2 điểm cực tr của đồ thị hàm số (1) có PT là: $\Delta: y=(6-8m^2)x-4m$

Theo bài toán $d(O,\Delta)=\frac{|-4m|}{\sqrt{(6-8m^2)^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 64m^4-101m^2+37=0$

$\Leftrightarrow m=\pm1$ hoặc $m=\pm\frac{\sqrt{37}}{8}$. Đối chiếu điều kiện, ta thấy $m=\pm1$ thỏa.

Vậy, với $m=\pm1$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 6. Giả sử đồ thị $y=mx^3-3mx^2+(2m+1)x+3-m$, có đồ thị (C_m) có 2 cực trị. Tìm m để khoảng cách từ $I\left(\frac{1}{2};4\right)$ đến đường thẳng đi qua 2 cực trị của (C_m) là lớn nhất.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3mx^2-6mx+2m+1$

Để (C_m) có 2 cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt đồng thời đổi dấu 2 lần qua mỗi nghiệm đó, tức là ta luôn có: $\begin{cases}m\neq0\\ 3m^2-3m>0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>1$

Với $m<0$ hoặc $m>1$ thì (C_m) luôn có 2 cực trị, đồng thời hoành độ cực trị thỏa mãn phương trình $3mx^2-6mx+2m+1=0$ (*).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Và $y=\frac{1}{3}(x-1)\left(3mx^2-6mx+2m+1\right)+\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]$, suy ra

$y=\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]$ do (*) là đường thẳng đi qua 2 cực trị.

Đặt $\Delta:\ y=\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right] \Leftrightarrow \Delta:\ (2-2m)x-3y+10-m=0$

Cách 1: $d(I;\Delta)=\frac{|-2m-1|}{\sqrt{(2-2m)^2+9}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{18}{(2m+1)^2}-\frac{6}{2m+1}+1}}$

Hay $d(I;\Delta)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2m+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}}\le\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi $m=\frac{5}{2}$.

Vậy, với $m=\frac{5}{2}$ thì $\max d(I;\Delta)=\sqrt{2}$.

Cách 2: Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $M\left(-\frac{1}{2};3\right)$ với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi N là hình chiếu vuông góc của I lên Δ, khi đó $d(I;\Delta)=IN\le IM$, do đó khoảng cách từ I đến Δ bằng IM khi và chỉ khi $IM\perp\Delta$ tức

$$k_{IM}.k_{\Delta}=-1 \Leftrightarrow \frac{2-2m}{3}.1=-1 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x-2y-5=0$.

Bài 2: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x-2y=0$.

Bài 3:

1. Cho hàm số $y=x^3+mx^2+7x+3$. Tìm m có để đồ thị có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị vuông góc với đường thẳng *d*: $y=3x-7$.

2. Tìm m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(5m-4)x+2$ có cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số song song với đường thẳng (d): $8x+3y+9=0$.

Bài 4: Tìm m để hàm số:

1. $y=x^3-3mx-3m+1$ (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời chúng cách đều đường thẳng có phương trình $x-y=0$.

2. $y=-\frac{x^3}{3}+(m+1)x^2-4mx$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu sao cho trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm này thuộc đường thẳng $(d): 2x-3y=0$.

3. $y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

Bài 5: Tìm m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$

1. Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng $y=-4x$.

2. Đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y=x+1$.

Bài 6: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y=\frac{x^2-2mx+m}{x+1}$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $x+2y+4=0$.

2. $y=x^3-3x^2+m^2x+m$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng: $d: x-2y-5=0$.

Bài toán 04: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU THỎA MÃN HOÀNH ĐỘ CHO TRƯỚC

Phương pháp

1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu và hoành độ các điểm cực trị thoả hệ thức cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Phân tích hệ thức để áp dụng định lí Vi-et.

2. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị trên khoảng $K_1=(-\infty;\alpha)$ *hoặc* $K_2=(\alpha;+\infty)$.

Xét hàm số $y=f(x)=a^3+bx^2+cx+d$

$$y'=f(x)=3ax^2+2bx+c.$$

Đặt $t=x-\alpha$, khi đó: $y'=g(t)=3at^2+2(3a\alpha+b)t+3a\alpha^2+2b\alpha+c$

Hàm số có cực trị thuộc $K_1=(-\infty;\alpha)$	Hàm số có cực trị thuộc $K_2=(\alpha;+\infty)$
Hàm số có cực trị trên khoảng $(-\infty;\alpha)$ $\Leftrightarrow f(x)=0$ có nghiệm trên $(-\infty;\alpha)$. $\Leftrightarrow g(t)=0$ có nghiệm $t<0$ $\Leftrightarrow P<0$ hoặc $\begin{cases}\Delta'>0\\S<0\\P\ge 0\end{cases}$	Hàm số có cực trị trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ $\Leftrightarrow f(x)=0$ có nghiệm trên $(\alpha;+\infty)$. $\Leftrightarrow g(t)=0$ có nghiệm $t>0$ $\Leftrightarrow P<0$ hoặc $\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P\ge 0\end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả:

a) $x_1 < \alpha < x_2$ b) $x_1 < x_2 < \alpha$ c) $\alpha < x_1 < x_2$

$y' = f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đặt $t = x - \alpha$, khi đó: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$

a) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả $x_1 < \alpha < x_2$

$\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0$

b) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả $x_1 < x_2 < \alpha$

$\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

c) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả $\alpha < x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị của m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$

Đồ thị (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (m+2) \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m+2) > 0 \\ P = \dfrac{m}{3(m+2)} > 0 \\ S = \dfrac{-2}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 - 2m + 3 > 0 \\ m < 0 \\ m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m < 0 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2$$

Vậy, với $-3 < m < -2$ thì đồ thị hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ là các số dương.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9\left[(m+1)^2 - 3\right] > 0 \Leftrightarrow m > -1 + \sqrt{3}$ hoặc $m < -1 - \sqrt{3}$.

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $x_1x_2 = 3$.

Khi đó: $|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$

Vậy, $-3 \le m < -1 - \sqrt{3}$ và $-1 + \sqrt{3} < m \le 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$

Đồ thị (C_m) có 2 điểm cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' = (1-2m)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > \dfrac{5}{4}$

Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{2(1-2m)}{3}, x_1x_2 = \dfrac{2-m}{3}$

$|x_1 - x_2| > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > \dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 4(1-2m)^2 - 12(2-m) > 1 \Leftrightarrow 16m^2 - 12m - 21 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{3+\sqrt{93}}{8}$ hoặc $m < \dfrac{3-\sqrt{93}}{8}$

Vậy, $m < -1$ hoặc $m > \dfrac{3+\sqrt{93}}{8}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m + 1$. Với giá trị nào củ m thì hàm số đạt cực trị tại tại những điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 2(m-2)x + (5m+4)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + (5m+4) = 0$ (*)

Đồ thị hàm số đã cho có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệ nghĩa là phải có:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Delta' = (m-2)^2 - (5m+4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 9$

Khi $m < 0$ hoặc $m > 9$ thì đồ thị cho có cực trị tại những điểm có hoành độ x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*)

Để thỏa mãn điều kiện $x_1 < 2 < x_2$ ta cần có:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0$$

Theo định lý vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2-m) \\ x_1x_2 = 5m+4 \end{cases}$

Nên có $5m + 4 - 2.2(2-m) + 4 < 0 \Leftrightarrow 9m < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Vậy, $m < 0$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2$. Tìm giá trị của tham số thực m sao cho hàm số có cực đại, cực tiểu và các cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1^2 + 2x_2^2 = 77$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó tức là phải có $\Delta' = 9 - 9m > 0 \Rightarrow m < 1$

Áp định lí Vi-ét cho x_1, x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m \end{cases}$

$3x_1^2 + 2x_2^2 = 77 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + x_1^2 = 77 \Leftrightarrow 2.2^2 - 4m + x_1^2 = 77 \Leftrightarrow x_1^2 = 69 + 4m$ (1)

Mà x_1 là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 - 6x_1 + 3m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2x_1 - m$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $69 + 4m = 2x_1 - m \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{69+5m}{2}$

Thay vào (1) ta được: $\left(\dfrac{69+5m}{2}\right)^2 = 69 + 4m \Leftrightarrow 25m^2 + 674m + 4485 = 0$

$\Leftrightarrow m = -15$ hoặc $m = -\dfrac{299}{25}$ thỏa điều kiện $m < 1$

Vậy, $m = -15$ hoặc $m = -\dfrac{299}{25}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6: Cho hàm số: $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Với giá trị nào của m để hàm số có ít nhất 1 điểm cực trị có hoành độ thuộc khoảng $(-2;0)$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$ và $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = 0$ (*)

Hàm số có ít nhất 1 cực trị thuộc $(-2;0)$ $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-2;0)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -2 < x_1 < x_2 < 0 & (1) \\ -2 < x_1 < 0 \le x_2 & (2) \\ x_1 \le -2 < x_2 < 0 & (3) \end{array}\right.$

TH1: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ -2 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ -2 < \dfrac{2m-1}{3} < 0 \\ 4 + \dfrac{4(2m-1)}{3} + \dfrac{2-m}{3} > 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{10}{7} < m < -1$

TH2: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ g(0) = 2 - m \le 0 \\ (x_1+2) + (x_2+2) > 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m \ge 2 \\ \dfrac{2m-1}{3} > -2 \\ \dfrac{2-m}{3} + \dfrac{4(2m-1)}{3} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$

TH3: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ g(-2) = 10 + 7m \le 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m \le \dfrac{-10}{7} \\ \dfrac{2.(2m-1)}{3} < 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le \dfrac{-10}{7}$

Vậy, $m \in \left[-\infty; -\dfrac{10}{7}\right)$ là giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$.

   Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$.

2. Tìm các giá trị của m để hàm số: $y = \dfrac{1}{3}(m-1)x^3 - \dfrac{m+3}{2}x^2 + (3-m)x - m + \dfrac{3}{2}$ có cực trị và số 2 nằm giữa hai điểm cực trị của hàm số.

3. Tìm các giá trị của m để hàm số: $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. Tìm các giá trị của m để hàm số: $y = mx^3 - (2m+1)x^2 - mx + 1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời điểm cực đại của đồ thị hàm số có hoành độ lớn hơn 1.

5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \ge 8$.

6. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$. Tìm các giá trị của m để hàm số cho có các điểm cực trị x_1, x_2 với $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2}$.

7. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m(x+1)}{x+2}$ có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = -6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$.

8. Tìm tham số m để hàm số: $y = \frac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$ đạt cực tiểu tại $x \in (0; 2m)$, $m > 0$.

9. Tìm m để hàm số: $y = (x - m)(x^2 - 3x - m - 1)$ có cực đại và cực tiểu x_1, x_2 thoả $|x_1.x_2| = 1$.

10. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|y(x_1) - y(x_2)| > 8$.

Bài 2: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y = \frac{mx^2 + x + m}{x + m}$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ x_1, x_2 và $|y(x_2) - y(x_1)| \le 4$

2. $y = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|y(x_2) - y(x_1)| = 8$.

3. $y = \frac{1}{3}mx^3 + 3mx^2 + (3m+1)x - 2$ có cực đại tại $x \in (-3; 0)$.

4. $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + 2$ có 2 điểm cực trị dương.

5. $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 - 4x_1 = x_2$.

Bài 3:

1. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số cho có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

2. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (m-1)x + 2$. Tìm m để hàm số có cực đại tại x_1, cực tiểu tại x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$.

3. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + 2(5m-8)x + 1$. Xác định tham số m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ bé hơn 1.

4. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

5. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + (6m+3)x - 3m$ đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ lớn hơn -2.

6. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 6x^2 + 3mx + 2 - m$ số có điểm cực đại $M(x_1; y_1)$ và điểm cực tiểu $M_2(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)(x_1x_2 + 2)} < 0$

Bài 4: Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+4)x^2 + (2m+5)x + 1$

1. Có hai cực trị lớn hơn -1;
2. Có đúng một cực trị lớn hơn -1;
3. Có ít nhất một cực trị lớn hơn $\frac{3}{2}$;
4. Có hai cực trị nhỏ hơn 4;
5. Có một cực trị trong khoảng $(3; 5)$;
6. Không có cực trị.

Bài 5: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ (1). Tìm m để hàm số có cực trị:

1. Trong khoảng $(-\infty; 1)$.
2. Trong khoảng $(1; +\infty)$.
3. x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2$.
4. x_1, x_2 thoả mãn $1 < x_1 < x_2$.

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3ax + 4$. Tìm a để hàm số cho đạt cực trị tại x_1, x_2 phân biệt và thoả mãn điều kiện: $\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2$

Bài 7:

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d: $y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

2. Cho hàm số $y = -x^3 + (m+1)x^2 - 2(m-2)x - 4$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho biểu thức: $P = \left|x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 8: Cho hàm số: $y=\frac{mx^2-4x+m+3}{x+2}$ (1)

1. Với giá trị nào của m thì hàm số (1) có hai cực trị mà giá trị tại điểm cực trị cùng dấu;

2. Tìm giá trị của m để đường thẳng $d: y=-3(x+10)$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Trong trường hợp này, tìm một hệ thức giữa y_1 và y_2 độc lập đối với m.

Bài 9: Tìm tham số m để hàm số:

1. $y=\frac{2x^2+mx+2m-1}{x+1}$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $-2<x_1<-1<x_2<0$.

2. $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x-12m+8$ có hai điểm cực trị A và B sao cho $AM+BM$ nhỏ nhất, với $M(3;2)$.

3. $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ có hai điểm cực trị, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

Dạng 4: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU CÙNG ĐIỂM K TẠO THÀNH TAM GIÁC THỎA MÃN TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ

Phương pháp.

1. *Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu cắt hai trục Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).*
   - Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
   - Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
   - Tìm giao điểm A, B của Δ với các trục Ox, Oy.
   - Giải điều kiện $S_{\Delta IAB}=S$.

2. *Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).*
   - Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
   - Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
   - Giải điều kiện $S_{\Delta IAB}=S$.

3. *Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân hoặc tam giác đều.*
   - Tìm điều kiện để phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
   - Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B, C. Lập luận chỉ ra ΔABC cân tại A.
   - Giải điều kiện: ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$; ΔABC đều $\Leftrightarrow AB=BC=AC$

4. *Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích S cho trước.*
   - Tìm điều kiện để phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
   - Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B, C.
   - Kẻ đường cao AH.
   - Giải điều kiện: $S=S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC$.

Ví dụ 1

1. Tìm tham số thực m để hàm số: $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ (1) có 3 cực trị A,B,C sao cho: $OA=BC$, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B,C là 2 điểm cực trị còn lại.

Đề thi Đại học khối B – năm 2011

2. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Đề thi Đại học khối A,A1 – năm 2012

3. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ (1), m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Đề thi Đại học khối B– năm 2012

Lời giải

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-4(m+1)x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hay $x^2=m+1$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ và đổi dấu 3 lần qua nghiệm x hay $x^2=m+1$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m+1>0$ tức $m>-1$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 cực trị

$A(0;m)$, $B(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1)$, $C(\sqrt{m+1};-m^2-m-1)$

Theo bài toán, ta có: $OA=BC \Leftrightarrow m^2=4(m+1) \Leftrightarrow m=2\pm 2\sqrt{2}$ thỏa $m>-1$.

2. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm $y'=4x^3-4(m+1)x$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4(m+1)x=0 \Leftrightarrow x=0, x^2=(m+1)$

Hàm số có 3 cực trị điều kiện cần là $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Khi đó $y'=4x(x-\sqrt{m+1})(x+\sqrt{m+1})$ đổi dấu qua các điểm $x=0, x=-\sqrt{m+1}, x=\sqrt{m+1}$ nên hàm số có 3 cực trị tại 3 điểm này.

Với $m>-1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;m^2)$, $B(-\sqrt{m+1};-2m-1)$, $C(\sqrt{m+1};-2m-1)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Cách 1: Nhận xét: $A \in Oy$, B và C đối xứng qua Oy nên tam ABC cân tại A tức là $AB = AC$ nên tam giác chỉ có thể vuông cân tại A.

Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(0;-2m-1)$

Do đó để tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow BC = 2AM$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền) $\Leftrightarrow 2\sqrt{m+1} = 2(m^2+2m+1) = 2(m+1)^2 \Leftrightarrow 1 = (m+1)\sqrt{m+1} = (m+1)^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow 1 = (m+1) \Leftrightarrow m = 0$ (do $m > -1$)

Cách 2: ABC vuông cân.

Ta có: $AB^2 = AC^2 = (m+1)+(m+1)^4$ và $BC^2 = 4(m+1)$.

Theo định lý pitago ta có:

$2AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow (m+1)^4 = m+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ m+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$

So với điều kiện $m > -1$, m cần tìm là $m = 0$.

Cách 3: ABC vuông cân $\Leftrightarrow AB.AC = 0 \Leftrightarrow -(m+1)+(-2m-1-m^2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -1$ (loại)

Cách 4:

Sử dụng góc ABC vuông cân $\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}\right) = 45^0$, từ đây tìm được $m = 0$

3. Cách 1:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$. Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $(m \neq 0)$ và đổi dấu qua mỗi nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 2m$.

Khi đó hàm số có hai điểm cực trị. $A(0;3m^3)$, $B(2m;-m^3)$

Nhận xét: A thuộc Oy nên $OA = |y_A| = |3m^3|$, $d[B,OA] = 2|m|$ và $S_{ABC} = 48$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|3m^3||2m| = 48 \Leftrightarrow m^4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$ thỏa điều kiện bài toán

Cách 2:

Để hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm, nghĩa là phải có: $\Leftrightarrow \Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow 36m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Với $m \neq 0$ thì hàm số có cực đại $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

Trong đó: $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ và $y_1 = 2m^2x_1 + 3m^3$, $y_2 = 2m^2x_1 + 3m^3$

$S_{\Delta OAB} = 48 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.\frac{|-3m^3|}{\sqrt{4m^4+1}} = 96$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2(1+4m^4)}.\frac{|-3m^3|}{\sqrt{4m^4+1}} = 96 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}.|-3m^3| = 96$

Hay $\sqrt{(2m)^2}|-3m^3| = 96 \Leftrightarrow m^4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = \frac{x^2-2mx+m}{x+m}$ (1). Tìm tham số m để đồ thị hàm số (1) có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu đồng thời:
1. Đường thẳng đi qua hai điểm này tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1;
2. Cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Hàm số có có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu khi phương trình $x^2 + 2mx - 2m^2 - m =$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m$ tức $m < -\frac{1}{3}$ hoặc $m > 0$.

1. Phương trình đường thẳng qua hai cực trị là: $y = 2x - 2m$, theo bài toán ta có:

$A(m;0)$ và $B(0;-2m)$. $S_{AOB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Rightarrow |m| = 1$.

2. $m < -\frac{1}{3}$ hoặc $m > 0$ thì phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại $C(x_1;y_1)$ và cực tiểu $D(x_2;y_2)$: $y = 2x - 2m$, khi đó

$C(x_1;2x_1-2m)$ và $D(x_2;2x_2-2m)$

Tam giác OCD vuông tại O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = 0$ tức

$5x_1x_2 - 4m(x_1+x_2) + 4m^2 = 0$ (*)

Áp dụng định lí Vi-ét $x_1 + x_2 = -2m$; $x_1x_2 = -2m^2 - m$,

Khi đó (*) trở thành $-2m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$ hoặc $m = 0$.

Đối chiếu điều kiện, ta thấy $m = -\frac{5}{2}$ thỏa.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^2(x^2+a)$; với a là tham số thực, x là biến số thực. Chứng minh rằng đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác nhọn khi và chỉ khi $a < -2$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có: $y' = 4x^3 + 2ax$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = -\frac{a}{2}$

Để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow -\frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < 0$, khi đó phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm $x = 0$ hoặc $x = -\sqrt{-\frac{a}{2}}$ hoặc $x = \sqrt{-\frac{a}{2}}$

Giả sử hàm số có 3 điểm cực trị là: $O(0;0); A\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}; -\frac{a^2}{4}\right); B\left(-\sqrt{-\frac{a}{2}}; -\frac{a^2}{4}\right)$

Suy ra: $OA = OB = \sqrt{\frac{a^4}{16} - \frac{a}{2}} \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O, do đó ta chỉ cần chứng minh ΔOAB có góc $\widehat{AOB}$ nhọn thì ΔOAB có 3 góc nhọn.

Ta có: $\cos\widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a^4}{16}}{-\frac{a}{2} + \frac{a^4}{16}} = \frac{a^4 + 8a}{a^4 - 8a} = \frac{a^3 + 8}{a^3 - 8}$

$\widehat{AOB}$ là góc nhọn $\Leftrightarrow \cos\widehat{AOB} > 0 \Leftrightarrow \frac{a^3+8}{a^3-8} > 0 \Leftrightarrow a^3 + 8 < 0$ (vì $a < 0$ nên $a^3 - 8 < 0$)

$a < -2$. Kết hợp điều kiện có 3 cực trị của hàm số ta được $a < -2$

Vậy, hàm số có 3 cực trị lập thành tam giác nhọn khi và chỉ khi $a < -2$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (1). Xác định m để hàm số (1) có cực trị, đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số có cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm, tức là phải có: $\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0$ hay $m > -3$.

Với $m > -3$ thì đồ thị của hàm số có cực trị và $y = \frac{1}{3}(x-1).y' + \left(-\frac{2m}{3} - 2\right)x + 2 - \frac{m}{3}$

Suy ra $y = \left(-\frac{2m}{3} - 2\right)x + 2 - \frac{m}{3}$ là đường thẳng d qua 2 điểm cực trị

Giả sử đường thẳng d cắt 2 trục Ox và Oy lần lượt tại

$A\left(\frac{6-m}{2(m+3)}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{6-m}{3}\right)$

Tam giác OAB cân $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{6-m}{2(m+3)}\right| = \left|\frac{6-m}{3}\right| \Leftrightarrow m = 6, m = -\frac{9}{2}, m = -\frac{3}{2}$

Với $m = 6$ thì $A \equiv B \equiv O$ do đó so với điều kiện ta nhận $m = -\frac{3}{2}$

Vậy, với $m = -\frac{3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (1). Xác định m để $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số (1) một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

và $y' = 0 \Leftrightarrow x = m,\ x = m+1 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

Tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị là

$A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$, $B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$

Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất.

Ta có: $d(M, AB) = \frac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M; AB) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \min d(M; AB) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $m = 0$

Vậy, với $m = 0$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 6: Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$ và với mọi $m > 0$ thì hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

Khi đó, phương trình đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu là $\Delta: 2mx + y - 2 = 0$

Điều kiện để đường thẳng Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt là

$d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow m > 0$

$S_{IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \leq \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi IA vuông góc IB.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $HI = HA = HB$

$IH^2 + HB^2 = R^2 \Rightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{4}$

Vậy, với $m = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{4}$ thỏa mãn bài toán.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 1.

1. Cho hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên.

2. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m-1$ (1). Định m để hàm số (1) có ba cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) tạo thành một tam giác có chu vi bằng $4\left(1+\sqrt{65}\right)$.

3. Cho hàm số $y=\frac{x^2+(a+1)x+a-b}{x+1}$. Tìm giá trị của tham số thực a, b sao cho hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và đường thẳng qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có chu vi bằng $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

Bài 2.

1. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+4m-1$. Tìm m để đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

2. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

1. $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+4$ có hai điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 (O là gốc tọa độ).

2. $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

3. $y=x^4-2m(m-1)x^2+m+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

4. $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có 2 cực trị cùng điểm O tạo thành tam giác vuông tại O.

Bài 4.

1. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$. Xác định m để đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB}=120^0$ với O là gốc tọa độ.

2. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị của có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

Bài 5.

1. Với giá trị nào của $m\in\mathbb{R}$ thì đồ thị của hàm số $y=-x^4+4mx^2-4m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của 1 tam giác nhận điểm $H\left(0;\frac{31}{4}\right)$ làm trực tâm.

2. Tìm m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

3. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

4. Tìm m để đồ thị hàm số: $y=x^4-mx^2+4x+m$ có ba điểm cực trị sao cho tam giác có đỉnh là ba điểm cực trị đó nhận gốc toạ độ làm trọng tâm.

Bài 6. Tìm tham số thực m để hàm số: $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$ có cực đại A và cực tiểu B sao cho:

1. Khoảng cách giữa A và B bằng $\sqrt{2}$

2. Hai điểm A và B tạo với điểm $C(4;0)$ một tam giác vuông tại C.

Bài 7. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số

$y=x^4+mx^2+6-\frac{m^2}{2}$ có 3 cực trị $A\in Oy$, B, C sao cho:

1. Tam giác ABC vuông tại A
2. Diện tích tam giác ABC bằng 32
3. Diện tích tứ giác OABC bằng 52
4. Tứ giác ABOC là hình bình hành.

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN, HÌNH BÌNH HÀNH, HÌNH THOI....

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2$ có 3 cực trị tạo một tam giác ngoại tiếp đường tròn có bán kính $r=\frac{1}{2}$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi y' có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu khi x qua 3 nghiệm đó, khi đó phương trình $x^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow m>0$.

Với $m>0$ hàm số có điểm cực trị $A(0;2)$, $B\left(-\sqrt{m};2-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};2-m^2\right)$.

$r=\frac{1}{2}\Leftrightarrow S=pr\Leftrightarrow\sqrt{m^3+1}=m^2-1\Rightarrow m=2$

Vậy, với $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Giả sử đồ thị $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+3$ có 3 cực trị A, B, C. Tìm m để đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1.

http://sachxua.edu.vn

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4x\left(x^2-m^2-1\right)$.

Dễ thấy, $\forall m\in\mathbb{R}$ thì $y'=0$ có 3 nghiệm

$x=0$ hoặc $x=-\sqrt{m^2+1}$ hoặc $x=\sqrt{m^2+1}$ nên đồ thị hàm số có 3 cực trị.

Giả sử $A(0;3)$, $B\left(-\sqrt{m^2+1};3-\left(m^2+1\right)^2\right)$, $C\left(\sqrt{m^2+1};3-\left(m^2+1\right)^2\right)$

Ta có: $AB=AC=\sqrt{\left(m^2+1\right)^4+m^2+1}$, $BC=2\sqrt{m^2+1}$

I là trung điểm BC $\Rightarrow AI=\left(m^2+1\right)^2$.

Diện tích tam giác ABC: $\frac{1}{2}.BC.AI=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)r$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$r=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^2+1\right)^2\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{\left(m^2+1\right)^4+m^2+1}+\sqrt{m^2+1}}=1 \text{ hay } \left(m^2+1\right)^2=1+\sqrt{\left(m^2+1\right)^3+1}\quad(*).$$

Đặt $t=m^2+1$.

Phương trình (*) viết lại: $t^2=1+\sqrt{1+t^3}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-1\geq 0\\\left(t^2-1\right)^2=1+t^3\end{cases}\Rightarrow t=2$

Với $t=2$ tức $m^2+1=2\Leftrightarrow m=\pm1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm các giá trị của m để hàm số:

1. $y=x^4-2mx^2+m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

2. Xác định giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ để hàm số: $y=x^4-2mx^2+2$ có 3 cực trị tạo một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$.

Bài 2: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

2. x^4-2mx^2+m có ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1

3. $y=x^4-2mx^2+2m$ của hàm số có 3 cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành giác nội tiếp.

Bài 3. Tìm m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m-1$ có 3 điểm cực trị đồng thời c điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+\frac{4}{3}(m+1)^3$. Tìm m để các điểm cực đại, cự tiểu của đồ thị hàm số cho nằm về hai phía (phía trong và phía ngoài) của đườn tròn (K): $x^2+y^2-4x+3=0$.

Bài 5. Cho hàm số $y=x^4+mx^2-\frac{m^2}{2}+6$. Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại là các điểm cực tiểu là B,C sao cho tứ giác ABOC là hình thoi. (O là gốc tọa độ).

Bài 6:

1. Cho hàm số $y=x^4-(3m-1)x^2+2m+1$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có b điểm cực trị A, B, C cùng với điểm D(7;3) nội tiếp được một đường tròn.

2. Xác định tham số thực m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m-1)x^2+(m-2)x+1$ có cực t A,B cùng $D\left(3;\frac{7}{2}\right)$ và gốc tọa độ tạo thành hình bình hành OADB theo thứ tự đó.

Bài 7: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng cố định.

Bài 8: Chứng tỏ rằng chỉ có một điểm A duy nhất trên mặt phẳng toạ độ sao cho n là điểm cực đại của đồ thị $f(x)=\frac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ ứng với một giá trị thíc hợp của m và cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị m thích hợp khá Tìm toạ độ của A.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1. Định nghĩa: Cho hàm số xác định trên D

i) Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\le M\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M=\max_{x\in D} f(x).$$

ii) Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\ge M\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } m=\min_{x\in D} f(x).$$

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

Phương pháp chung: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên D ta tính y', tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại và lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.

Chú ý:

* Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $[a;b]$ thì

$$\max_{[a;b]} f(x)=\max\{f(a),f(b)\};\ \min_{[a;b]} f(x)=\min\{f(a),f(b)\}.$$

* Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau

B1: Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2,\dots,x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.

B2: Tính các giá trị $f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n),f(a),f(b)$. Khi đó

$$\max_{x\in[a;b]} f(x)=\max\{f(x_1),\dots,f(x_n),f(a),f(b)\}$$

$$\min_{x\in[a;b]} f(x)=\min\{f(x_1),\dots,f(x_n),f(a),f(b)\}.$$

Chú ý:

Nếu hàm số $y=f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì T thì để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn thuộc D có độ dài bằng T.

* Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D. Khi đặt ẩn phụ $t=u(x)$, ta tìm được $t\in E$ với $\forall x\in D$, ta có $y=g(t)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E.

* Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.
* Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta còn dùng phương pháp miền giá trị hay Bất đẳng thức để tìm Max, Min.
* Ta cần phân biệt hai khái niệm cơ bản:

+ Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D với cực đại của hàm số.
+ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D với cực tiểu của hàm số.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D mang tính toàn cục, còn giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số chỉ mang tính địa phương.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Phương pháp.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

$$M=\max_{x\in D} f(x)\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D, f(x)\le M\\ \exists x_1\in D, f(x_1)=M\end{cases} \qquad m=\min_{x\in D} f(x)\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D, f(x)\ge m\\ \exists x_2\in D, f(x_2)=m\end{cases}$$

Nếu hàm số f liên tục trên [a;b] thì f đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Nếu hàm số f liên tục trên [a,b] và có đạo hàm trên khoảng (a,b)*thì giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f trên [a;b] luôn tồn tại, hơn nữa các giá trị này chỉ đạt được tại các điểm cực trị hoặc tại hai biên a,b. Do đó trong trường hợp này để tìm $\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ ta có thể tiến hành một cách đơn giản hơn như sau:*

- Tính $f'(x)$ và tìm các nghiệm $x_1,x_2,\dots,x_n$ thuộc (a; b) của phương trình $f'(x)=0$.
- Tính $f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n),f(a),f(b)$.
- Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong các giá trị trên là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên [a,b].

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y=x^4-2x^2+5, x\in[-2;3]$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$, xét $x\in[-2;3]$

Ta có: $y'=4x^3-4x$ và $y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0$ hoặc $x=\pm1$

$y(0)=5;\ y(-1)=4;\ y(1)=4;\ y(-2)=13;\ y(3)=68.$

Vậy, $\max_{x\in[-2;3]} y=68$ khi $x=3$ và $\min_{x\in[-2;3]} y=4$ khi $x=\pm1$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y=x^5-5x^4+5x^3+2, x\in[-1;2]$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$, xét $x\in[-1;2]$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có: $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = 3 \notin [-1;2]$

$y(0) = 2;\ y(1) = 3;\ y(-1) = -9;\ y(2) = -6.$

Vậy, $\max\limits_{x\in[-1;2]} y = 3$ khi $x = 1$ và $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = -9$ khi $x = -1$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1. $y = 3 - x + |x^2 - 4x + 3|$ 2. $y = \sqrt{4 - x^2} + |x - 1|$

Bài 2: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1. $y = (3 - x)\sqrt{5 - x^2}$ 2. $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

3. $y = x + 2 + \sqrt{2x - x^2}$ 4. $y = (x - 6)\sqrt{x^2 + 4}$, $\forall x \in [0;3]$.

Bài 3: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 2}$ 2. $y = \dfrac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$

Bài 4: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in [-2;3]$ 2. $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$

Bài 5: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 3$, $x \in [0;4]$ 2. $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$ trên đoạn $[-1;1]$

3. $y = \dfrac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Bài 6: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1. $y = (x + 3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ 2. $y = \sqrt{45 + 20x^2} + |2x - 3|$

Dạng 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT LIÊN QUAN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp.

Chú ý: $t = \sin x, |t| \le 1$, $t = \cos x, |t| \le 1$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x, |t| \le 1$, ta có: $y = \dfrac{t + 1}{t^2 + t + 1}$ với $t \in [-1;1]$

Ta có: $y' = \dfrac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ hoặc $t = -2 \notin [-1;1]$

$y(0) = 1;\ y(-1) = 0;\ y(1) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy, $\max\limits_{t\in[-1;1]} y = 1$ khi $t = 0$ và $\min\limits_{t\in[-1;1]} y = 0$ khi $t = -1$

Hay $\max y = 1 \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$$\min y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC không tù. Tìm GTLN của biểu thức:

$P = \cos 2A + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C)$

Lời giải

Ta có $A \le 90^0 \Rightarrow \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \le 2\cos A - 1 = 1 - 4\sin^2 \dfrac{A}{2}$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \cos^2 A = \cos A$.

$\cos B + \cos C = 2\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B - C}{2} \le 2\sin\dfrac{A}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos\dfrac{B - C}{2} = 1$. Đặt $t = \sin\dfrac{A}{2} \Rightarrow 0 < t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $P \le -4t^2 + 4\sqrt{2}t + 1 = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$, $t \in \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, có $f'(t) = -8t + 4\sqrt{2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có: $f(t) \le f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \Rightarrow P \le 3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \cos^2 A \\ \cos\dfrac{B - C}{2} = 1 \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$. Vậy $\max P = 3$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1. $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. 2. $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 2: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1. $y=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ 2. $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}+\cos\frac{4x}{1+x^2}+1$

Bài 3: Tìm GTLN và GTNN của hàm số sau $g(x)=f(\sin^2 x)f\left(\cos^2 x\right)$ trong đó hàm f thỏa mãn: $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x \quad \forall x\in[0;\pi]$.

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

1. $y=2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{6}\sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$.
2. $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$
3. $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$
4. $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$
5. $y=\frac{\sin^6 x|\cos x|+\cos^6 x|\sin x|}{|\sin x|+|\cos x|}$
6. $y=2\cos^6 x-\frac{3}{4}\cos 2x$
7. $y=\sin^3 x-\cos^3 x$
8. $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$
9. $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$

Dạng 3: Phương pháp đưa về một biến

*Do khuôn khổ chương trình, tác giả chỉ giới thiệu những bài toán cơ bản, trọng tâm thường xuất hiện trong đề kiểm tra 45 phút, thi học kì. Bạn đọc muốn tìm hiểu kĩ hơn dạng toán này, hãy tìm đọc cuốn: " **Bất đẳng thức và bài toán min – max trong các bài kiểm tra, thi học kì và trong kì thi tuyển sinh Đại học** " cùng tác giả.*

Phương pháp.

Nhắc lại bất đẳng thức Cô si (BĐT trung bình cộng – trung bình nhân)

- Hai số: Với hai số thực $a,b\ge 0$ ta luôn có: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Hệ quả: Với hai số thực dương a,b ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

- Ba số: Với ba số thực $a,b,c\ge 0$ ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Hệ quả: Với ba số thực dương a,b,c ta luôn có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$

- Tổng quát: Với n số thực không âm $a_1,a_2,...,a_n$ ta luôn có:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các số a_i bằng nhau.

Hệ quả: Với n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ ta có: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$

Một số lưu ý khi áp dụng BĐT Cô si:

- Bất đẳng thức Cô si chỉ áp dụng cho các số thực không âm, đồng thời là sự so sánh giữa trung bình cộng và trung bình nhân.
- Điều kiện để xảy ra dấu "=" là các số bằng nhau.

Phương pháp:

Nội dung của phương pháp này là tìm cách đưa một bất đẳng thức nhiều biến về bất đẳng thức chứa một biến. Một trong những công cụ tối ưu khi chứng minh bất đẳng thức một biến là công cụ đạo hàm. Quan trọng nhất ở phương pháp này là tìm cách đánh giá để đưa về một biến. Để đưa về một biến, chúng ta cần lưu ý:

- Nếu một bất đẳng thức hai biến có điều kiện và trong điều kiện có một biến bậc nhất thì ta có thể rút biến đó và thế vào bất đẳng thức cần chứng minh ta được một bất đẳng thức một biến. Tuy nhiên cách làm này chúng ta chỉ sử lí khi bất đẳng thức không quá phức tạp.
- Nếu điều kiện của bài toán và bất đẳng thức cần chứng minh là những biểu thức đối xứng hai biến thì ta có thể chuyển về tổng và tích hai biến đó. Lưu ý: $S^2\ge 4P$.
- Khi gặp bài toán chứng minh BĐT hai biến có dạng: $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\ge p$, trong đó $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là những biểu thức đẳng cấp bậc k hai biến, ta có thể đặt $x=ty$ $(y\ne 0)$.

Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành: $\frac{f(t,1)}{g(t,1)}\ge p$ đây là BĐT một biến. Để chứng minh BĐT này ta có thể sử dụng phương pháp khảo sát hàm số.

- Nếu trong bất đẳng thức xuất hiện các số hạng: $\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{a^n}$ thì ta có thể đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

Các ví dụ

Ví dụ 1.

Cho $x>0$, $y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$.

Lời giải

1. Cách 1: Ta có: $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow 4y=5-4x\Rightarrow P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số: $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(0;\frac{5}{4}\right)$

Ta có: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2}$. Trên khoảng $\left(0;\frac{5}{4}\right)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{5}{3}\text{(loại)}\end{array}\right.$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lập bảng biến thiên, ta được $\min\limits_{x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)} f(x)=f(1)=5 \Rightarrow \min P=5$ khi $x=1,\ y=\frac{1}{4}$.

Cách 2: $(x+y)P=\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}\right)(x+y)=\frac{x}{4y}+\frac{4y}{x}+\frac{17}{4}\ge 2+\frac{17}{4}=\frac{25}{4}$

Suy ra $P\ge 5$. Đẳng thức xảy ra: $\frac{x}{4y}=\frac{4y}{x}$ và $x+y=\frac{5}{4}$ hay $x=1,\ y=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hai số thực x, y thoả mãn: $\begin{cases}x\ge 0,\ y\ge 1\\ x+y=3\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+2y^2+3x^2+4xy-5x$.

Lời giải

Ta có $y=3-x\ge 1\Rightarrow x\le 2\Rightarrow x\in[0;2]$

Khi đó: $P=x^3+2(3-x)^2+3x^2+4x(3-x)-5x=x^3+x^2-5x+18$

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2-5x+18$ trên $[0;2]$ ta có:

$$f'(x)=3x^2+2x-5\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

Hơn nữa: $f(0)=18,\ f(1)=15,\ f(2)=20$

Vậy, $\max P=\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=20$ khi $x=2$, $\min P=\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(1)=15$ khi $x=1$.

TÂM ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ, PHÉP TỊNH TIẾN

A. CHUẨN KIẾN THỨC

I. TÍNH LỒI, LÕM, ĐIỂM UỐN CỦA ĐƯỜNG CONG

1. Định nghĩa.

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên $(a;b)$ và f có đạo hàm cấp hai trên $(a;b)$.

Ta nói:

(C) lồi trên $(a;b)$ nếu tại mọi điểm của (C), tiếp tuyến luôn ở phía trên (C).

(C) lõm trên $(a;b)$ nếu tại mọi điểm của (C), tiếp tuyến luôn ở phía dưới (C).

Điểm I thuộc (C) ngăn cách giữa phần lồi, phần lõm của (C) gọi là điểm uốn của (C).

2. Định lí

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(a;b)$ và gọi (C) là đồ thị của hàm số.

a) Nếu $f''(x)<0$ với mọi x thuộc $(a;b)$ thì (C) là đồ thị lồi trên khoảng đó.

b) Nếu $f''(x)>0$ với mọi x thuộc $(a;b)$ thì (C) là đồ thị lõm trên khoảng đó.

c) Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thuộc $(a;b)$ thì điểm $I(x_0;f(x_0))$ là điểm uốn của (C).

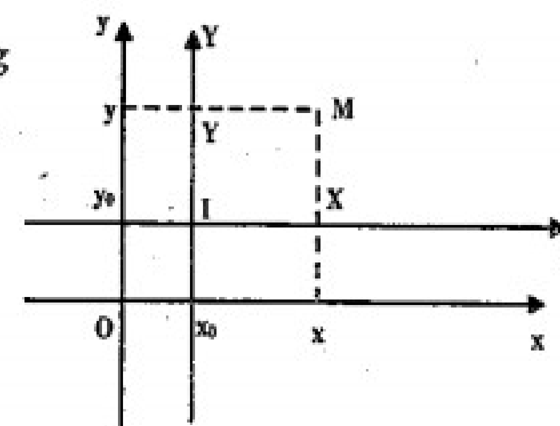
II. TỊNH TIẾN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.

Giả sử $I(x_0;f(x_0))$ là một điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ biến hệ tọa độ Oxy thành hệ tọa độ IXY.

Giả sử M là một điểm bất kỳ của mặt phẳng.

* (x;y) là tọa độ của M đối với hệ tọa độ Oxy.
* (X;Y) là tọa độ của M đối với hệ tọa độ IXY.

Ta có công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+y_0\end{cases}$



III. ĐỐI XỨNG CỦA HÀM SỐ

Lập phương trình của ảnh của một đường.

1. Trên mặt phẳng Oxy, cho phép biến hình F có công thức tọa độ là $\begin{cases}x=h(x')\\ y=g(y')\end{cases}$ (nghĩa là F biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$ khi và chỉ khi x,y,x',y' thỏa hệ này). Gọi (C') là ảnh của $(C): y=f(x)$ qua phép biến hình F. Hãy lập phương trình của (C).

2. Cho phép biến hình F và hai đường $(C_1),(C_2)$. Dựng các điểm M, N lần lượt thuộc $(C_1),(C_2)$ sao cho N là ảnh của M qua phép biến hình F.

Cách giải:

1. Vì (C') là ảnh của $(C): y=f(x)$ qua phép biến hình F nên với $M'(x';y')$ tùy ý thuộc (C') tồn tại $M(x;y)$ thuộc (C) sao cho $F(M)=M'$. Do đó, ta có $\begin{cases}x=h(x')\\ y=g(y')\end{cases}$

Vì $M(x;y)\in(C)$ nên $y=f(x)$. Vì vậy ta được $g(y')=f(h(x'))$.

Vậy, phương trình của (C') là $g(y)=f(h(x))$.

2. Gọi (C_1') là ảnh của (C_1) qua phép biến hình F. Ta có $N=F(M)\in F((C_1))=(C_1')$ nên N là giao điểm của (C_2) và (C_1'). Dựa vào tính chất của F ta tìm được M.

Chú ý 1: Cho hàm số $y=f(x)$, có đồ thị (C).

1. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn: Đồ thị của có đối xứng nhau qua trục Oy - có nghĩa là, trục Oy là trục đối xứng của nó.

2. Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ: Đồ thị của nó nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

3. Cho hai điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ và đường thẳng $d: mx+ny+p=0$. Nếu A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d thì phải thỏa mãn hệ sau: $k_{AB}.k_d=-1$, trung điểm I của AB thuộc đường thẳng d, trong đó $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. Cho điểm $I(x_0;y_0)$, nếu chuyển hệ tọa độ Oxy dọc theo phương của véc tơ $\overrightarrow{OI}$ thì công thức chuyển trục là: $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$

Khi đó phương trình của đồ thị (C) trong hệ mới: $Y = F(X;y_0;x_0)$.

Chú ý 2:

- Đối với đồ thị hàm phân thức, thì giao hai tiệm cận là tâm đối xứng
- Đối với hàm số bậc ba thì tọa độ điểm uốn là tọa độ tâm đối xứng
- Đối với hàm số trùng phương thì trục Oy là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: *Chứng minh đồ thị có trục đối xứng*

Phương pháp giải

Công thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Trong mặt phẳng Oxy, cho véc tơ $\vec{v} = (a;b)$. Gọi $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$. Ta có $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Đường $(C): y = f(x)$ có ảnh qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là

$$(C'): y - b = f(x - a) \Leftrightarrow y = f(x - a) + b.$$

Chứng minh đồ thị có trục đối xứng

Cách 1

- Giả sử trục đối xứng có phương trình: $x = x_0$. Gọi điểm $I(x_0;0)$

- Chuyển $(Oxy) \xrightarrow{\overrightarrow{OI}} (IXY) = \begin{cases} x = x_0 + X \\ y = Y \end{cases}$

- Viết phương trình đường cong (C) trong tọa độ mới: $Y = F(X;y_0;x_0)$ $(*)$

- Buộc cho $(*)$ là một hàm số chẵn: (Cho hệ số các ẩn bậc lẻ bằng O)

- Giải hệ các ẩn số bậc lẻ bằng 0 ta suy ra kết quả cần tìm.

Cách 2. Nếu với $x = x_0$ là trục đối xứng thì: $f(x + x_0) = f(x_0 - x)$ đúng với mọi x, thì ta cũng thu được kết quả.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm trên $(C): y = x^3 - 3x + 3$ hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = (3;0)$.

Phân tích hướng giải.

Giả thiết bài toán cho ta thấy ngay rằng N là ảnh của M qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, với $\vec{v} = (3;0)$.

Theo hướng giải của bài toán dựng điểm bằng phép biến hình, ta nghĩ ngay đến việc tìm ảnh (C') của (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Khi đó ta "dựng" được N là giao điểm của (C') và (C).

Lời giải

Gọi $(C') = T_{\vec{v}}(C)$ thì (C') có phương trình là

$$y - 0 = (x-3)^3 - 3(x-3) + 3 \Leftrightarrow y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15.$$

Vì $M \in (C)$ nên $N = T_{\vec{v}}(M) \in T_{\vec{v}}(C) = (C')$. Do đó, N là giao điểm của (C) và (C').

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') là $x^3 - 3x + 3 = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$

Phương trình này có hai nghiệm là $x = 1$ hoặc $x = 2$.

* Khi $x = 1$ ta được $N(1;1)$. Vì $\overrightarrow{MN} = (3;0)$ nên $M(-2;1)$.
* Khi $x = 2$ ta được $N(2;5)$. Vì $\overrightarrow{MN} = (3;0)$ nên $M(-1;5)$.

Ví dụ 2: Tìm trên $(C): y = x^3 - 3x + 3$ hai điểm M, N sao cho MN song song với trục hoành và $MN = 3$.

Phân tích hướng giải.

Giả thiết bài toán cho biết phương của đường thẳng (MN) và độ dài của MN là không đổi. Vì vậy véc tơ $\overrightarrow{MN}$ là được xác định, sai khác nhau về hướng.

Lời giải

Vì MN song song với trục hoành nên $\overrightarrow{MN} = k.\vec{i}$, với $\vec{i} = (1;0)$ là véctơ đơn vị của trục hoành.

Do $MN = 3$ nên $|k| = 3 \Leftrightarrow k = \pm 3$. Nếu $k = -3$ thì $\overrightarrow{MN} = -3\vec{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = 3\vec{i}$.

Vì không cần xem xét thứ tự của hai điểm M với N nên ta chỉ cần xét trường hợp $\overrightarrow{MN} = 3.\vec{i} = (3;0)$.

Theo bài toán ta được cặp điểm là $M(-2;1)$ và $N(1;1)$

hoặc $M(-1;5)$ và $N(2;5)$; $M(2;5)$ và $N(-1;5)$, $M(1;1)$ và $N(-2;1)$

Ví dụ 3: Tìm điểm M thuộc $(C): y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ M đến $(d): y = -x + 4$ bé nhất

Phân tích hướng giải.

Nếu gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng (d) thì $\overrightarrow{HM} = k.\vec{n} = (k;k)$, với $\vec{n} = (1;1)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng (d). Với mỗi k cố định ta cần dựng điểm $H \in (d)$, điểm $M \in (C)$ sao cho M là ảnh của H qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}(k;k)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng (d) thì $\overrightarrow{HM} = k.\vec{n} = (k;k)$, với $\vec{n} = (1;1)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng (d).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Gọi (d') là ảnh của (d) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}=(k;k)$. Ta có phương trình của (d') là: $y-k=-(x-k)+4 \Leftrightarrow y=-x+2k+4$

Vì $M=T_{\vec{v}}(H)\in T_{\vec{v}}(d)=(d')$ và M thuộc (C) nên hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $\frac{2x-3}{x-2}=-x+2k+4 \Leftrightarrow x^2-2(k+2)x+4k+5=0$.

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'=k^2-1\geq 0 \Leftrightarrow |k|\geq 1$.

Suy ra khoảng cách từ M đến (d) là $HM=\sqrt{2}|k|\geq\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_M=1$ (ứng với $k=-1$) hoặc $x_M=3$ (ứng với $k=1$)

Vậy, M(1;1) hoặc M(3;3) là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng đồ thị $y=\frac{x^4}{2}-x^2-\frac{3}{2}$ có duy nhất một trục đối xứng vuông góc với trục Ox.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên Oy là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Giả sử $x=m$ là một trục đối xứng khác của đồ thị hàm số đang xét.

Với mọi điểm $M(x_0;y_0)$ bất kỳ thuộc đồ thị và $M'(x_0';y_0')$ là điểm đối xứng với M qua đường thẳng $x=m$, thì tọa độ điểm M' được xác định bởi $\begin{cases}x_0+x_0'=2m\\y_0=y_0'\end{cases}$

Vì M' thuộc đồ thị hàm số, nên tọa độ của nó là nghiệm phương trình:

$$y_0'=\frac{x_0'^4}{2}-x_0'^2-\frac{3}{2}=\frac{(2m-x_0)^4}{2}-(2m-x_0)^2-\frac{3}{2}$$

Vì $y_0=y_0'$ nên có: $\frac{x_0^4}{2}-x_0^2-\frac{3}{2}=\frac{(2m-x_0)^4}{2}-(2m-x_0)^2-\frac{3}{2}, \forall x_0$.

Tức $\left[x_0^2+(2m-x_0)^2-2\right]\left[x_0^2-(2m-x_0)^2\right]=0$ đúng với $\forall x_0$.

Nhận thấy, không tồn tại m để đẳng thức $x_0^2+(2m-x_0)^2=2$ đúng với $\forall x_0$. Do vậy, $x_0^2-(2m-x_0)^2=0$ đúng với $\forall x_0$ khi $m=0$.

Vậy, $x=0$ là trục đối xứng duy nhất của đồ thị của hàm số.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm m để $(C): y=x^3-3x+3$ và $d_m: y=\frac{4}{3}x+m$ cắt nhau tại ba điểm mà trong đó có hai điểm M,N sao cho $MN=5$.

Bài 2: Tìm trên $(C): y=x^3-3x+3$ hai điểm M,N sao cho MN song song với trục hoành và MN lớn nhất.

Bài 3: Tìm tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4+4x^3+mx^2$, có đồ thị là (C_m), có trục đối xứng song song với trục Oy.

Dạng 2: *Chứng minh đồ thị có tâm đối xứng*

Công thức tọa độ của phép đối xứng tâm.

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm I(a;b). Gọi S_I là phép đối xứng tâm I.

Ta có $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua S_I khi và chỉ khi $\begin{cases}x'=2a-x\\y'=2b-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2a-x'\\y=2b-y'\end{cases}$

Đường $(C): y=f(x)$ có ảnh qua đối xứng tâm S_I là

$$(C): 2b-y=f(2a-x) \Leftrightarrow y=-f(2a-x)+2b$$

Chứng minh đồ thị có tâm đối xứng

Cách 1.

- Giả sử đồ thị (C) có tâm đối xứng là $I(x_0;y_0)$
- Chuyển: $(Oxy)\xrightarrow{\overrightarrow{OI}}(IXY)=\begin{cases}x=x_0+X\\y=y_0+Y\end{cases}$
- Viết phương trình (C) trong hệ tọa độ mới: $Y=F(X;y_0;x_0)$ (*)
- Chứng minh cho (*) là một hàm số lẻ

Cách 2.

Nếu đồ thị (C) nhận điểm I làm tâm đối xứng thì:

$$f(x_0+x)+f(x_0-x)=2y_0 \text{ với mọi } x$$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng đồ thị $(C): y=\frac{x-3}{x+2}$ có tâm đối xứng là điểm $I(-2;1)$.

Lời giải

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm S_I thì (C') có phương trình là

$$2\times 1-y=\frac{[2\times(-2)-x]-3}{[2\times(-2)-x]+2} \Leftrightarrow y=\frac{x-3}{x+2}.$$

Do (C') trùng với (C) nên (C) có tâm đối xứng là $I(-2;1)$.

Chú ý: Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy thành hệ trục tọa độ IXY theo công thức $\begin{cases}x=X+x_I\\y=Y+y_I\end{cases}$

Viết phương trình của (C) trong hệ trục tọa độ IXY rồi chứng minh hàm số thu được là hàm số lẻ.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 2.

Tìm tham số thực m để điểm I thuộc đồ thị $(C): y = x^3 + 3mx^2 + (m+2)x + 1$ nằm trên trục hoành. Biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $y'' = 0$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 2$

$y'' = 6x + 6m$ và $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -m$.

Dễ thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x_0 = -m$. Suy ra $I(-m; 2m^3 - m^2 - 2m + 1)$ là điểm uốn của đồ thị đã cho.

Vì $I \in Ox \Leftrightarrow 2m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Chứng minh giao hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị $y = \frac{x}{x+1}$

2. Chứng minh $y = \frac{x^2}{x-1}$ có tâm đối xứng, tìm tọa độ tâm đối xứng

Bài 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C)

1. Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số đã cho, biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $y'' = 0$.

2. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình đường cong (C) đối với hệ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (2+3m)x - 2m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Gọi I là điểm có hoành độ là nghiệm đúng phương trình $y'' = 0$. Tìm tham số m để đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox.

Dạng 3: *Tìm tham số m để đồ thị có tâm đối xứng*

1. Nếu $f(x;m)$ là hàm số phân thức hữu tỷ:

- Tìm tọa độ giao hai tiệm cận. Giả sử giao hai tiệm cận là $J(a;b)$

- Để I là tâm đối xứng thì buộc J trùng với I ta suy ra hệ: $\begin{cases} a = x_0 \\ b = y_0 \end{cases} \Rightarrow m$

2. Nếu $f(x;m)$ là hàm số bậc ba.

- Tìm tọa độ điểm uốn: $\Leftrightarrow \begin{cases} y''(x;m) = 0 \\ y = f(x;m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \Rightarrow J(a;b)$

- Tương tự, để I là tâm đối xứng, ta cho J trùng với I ta suy ra hệ: $\begin{cases} a = x_0 \\ b = y_0 \end{cases} \Rightarrow m$

Ví dụ

Ví dụ. Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số đã cho có 3 cực trị A, B, C và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$.

Lời giải

Đồ thị của hàm số $y = \frac{4x}{4x-m}$ có tâm đối xứng là $I\left(\frac{m}{4}; 1\right)$

Hàm số: $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3mx^2 + 4$

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, hay phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 4x^3 - 3mx^2 + 4$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Ta có: $g'(x) = 12x^2 - 6mx \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to g(0) = 4 > 0 \\ x = \frac{m}{2} \to g\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{16 - m^3}{4} \end{array}\right.$

$g'(x)$ đổi dấu 2 lần qua nghiệm và $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi

$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{16 - m^3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt[3]{2}$.

Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$ là tọa độ 3 cực trị thỏa mãn đề bài, khi đó

$y = y'\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{16}\right) - \frac{3m^2x^2}{16} + 3x + \frac{5m}{4} + 2$

$\Rightarrow y_i = -\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2, y_i' = 0 \ (i = 1,2,3)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC, nên $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};-\frac{m^2}{16}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+\left(x_1+x_2+x_3\right)+\frac{5m}{4}+2\right)$

Do x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $4x^3-3mx^2+4=0$, theo định lý Vi-et ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\dfrac{3m}{4}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{m}{4}\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=\dfrac{9m^2}{16}\end{cases}$$

Khi đó $G\left(\frac{m}{4};-\frac{9m^4}{16^2}+2m+2\right)$ và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{4x-m}$ khi và chỉ khi

$$G\left(\frac{m}{4};-\frac{9m^4}{16^2}+2m+2\right)\equiv I\left(\frac{m}{4};1\right)\Leftrightarrow(m-4)\left(9m^3+36m^2+144m+64\right)=0$$

$\Leftrightarrow m=4$. Vậy $m=4$ thỏa mãn để bài.

Chú ý: Ngoài cách giải trên ta có thể trình bày:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt nghĩa là phương trình $4x^3-3mx^2+4=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó phương trình $\frac{4x^3+4}{x^2}=3m$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0. Nói khác, đường thẳng $y=3m$ cắt đồ thị của hàm số $h(x)=\frac{4x^3+4}{x^2}$ tại 3 giao điểm. Đến đây đã dễ dàng.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Tìm m để hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+3m+4$ có tâm đối xứng $I(1;2)$.

2. Tìm m để hàm số $y=\frac{2x^2+(m-4)x-2m+1}{x-2}$ có tâm đối xứng $I(2;1)$.

Bài 2: Tìm m để đồ thị hàm số $y=-\frac{x^3}{m}+3mx^2-2$ $(m\neq 0)$ có tâm đối xứng $I(1;0)$

Bài 3: Cho hàm số $y=x^3-(3m-1)x^2+3mx+m+1$ có đồ thị là (C_m).

1. Tìm trên đồ thị (C_2) những cặp điểm đối xứng qua O.

2. Tìm m để trên (C_m) tồn tại một cặp điểm đối xứng nhau qua Oy.

Dạng 4: *Lập phương trình đường cong đối xứng với một đường cong qua một điểm hoặc qua một đường thẳng*

Phương trình của phép đối xứng tâm.

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(a;b)$. Gọi S_I là phép đối xứng tâm I.

Ta có $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua S_I khi và chỉ khi: $\begin{cases}x'=2a-x\\ y'=2b-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a-x'\\ y=2b-y'\end{cases}$

Đường $(C): y=f(x)$ có ảnh qua đối xứng tâm S_I

$$(C'): 2b-y=f(2a-x)\Leftrightarrow y=2b-f(2a-x).$$

Phương trình của phép đối xứng qua đường thẳng.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $(\Delta): Ax+By+C=0,\quad A^2+B^2>0.$

Gọi S_Δ là phép đối xứng qua đường thẳng (Δ).

Ta có $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua S_Δ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x'=x-2A\dfrac{(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\\ y'=y-2B\dfrac{(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-2A\dfrac{(Ax'+By'+C)}{A^2+B^2}\\ y=y'-2B\dfrac{(Ax'+By'+C)}{A^2+B^2}\end{cases}$$

Lập phương trình đường cong đối xứng với một đường cong qua một điểm hoặc qua một đường thẳng.

Cho đường cong (C) có phương trình $y=f(x)$ và một điểm $M(x_0;y_0)$ (cho sẵn)

1. Lập phương trình đường cong (C') đối xứng với đường cong (C) qua điểm M.

2. Lập phương trình đường cong (C') đối xứng với đường cong (C) qua đường thẳng $d: y=kx+b$.

Cách giải:

1. Gọi $N(x;y)$ thuộc $(C): y=f(x)$ là một điểm bất kỳ.

- Gọi N' là điểm đối xứng với N qua M thì: $N'(x';y')\in(C')\Rightarrow\begin{cases}x'=2x_0-x\ (1)\\ y'=2y_0-y\ (2)\end{cases}$

- Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}x=2x_0-x'\\ y=2y_0-y'\end{cases}$,

Thay x, y tìm được vào: $y=f(x)$, ta suy ra $y'=g(x';x_0;y_0)$.

Đó chính là phương trình của đường cong (C').

2. Gọi $A(x;y)\in(C)\Rightarrow y=f(x); B(x';y')\in(C')$

- Nếu (C) và (C') đối xứng nhau qua d thì A, B đối xứng nhau qua d:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_{AB}.k_d = -1 \\ \text{I là trung điểm của AB} \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\left(\dfrac{y'-y}{x'-x}\right) = -1 \quad (1) \\ \dfrac{y'+y}{2} = k\left(\dfrac{x+x'}{2}\right) + b \quad (2) \end{cases}$$

Ở (1) và (2) thì k,b là những số đã biết. Ta tìm cách khử x và y trong (1) và (2) để được một phương trình có dạng $y' = g(x')$.

Đó chính là phương trình của (C') cần tìm.

Chú ý: Xét phép biến hình g: $M(x,y) \Rightarrow M'(x';y')$.

Để tìm phương trình (C'),ảnh của (C) qua phép biến hình g, ta tính x và y theo x' và y' sau đó thay x, y vào phương trình của (C) sẽ suy ra được phương trình của (C').

Đặc biệt. Cho $(C): y = f(x)$

* Nếu (C') đối xứng với (C) qua gốc tọa độ O thì phương trình (C') là $y = -f(-x)$.
* Nếu (C') đối xứng với (C) qua trục hoành độ thì phương trình (C') là $y = -f(x)$.
* Nếu (C') đối xứng với (C) qua trục tung độ thì phương trình (C') là $y = f(-x)$.
* Nếu (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$ thì phương trình $(C'): x = f(y)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Lập phương trình đường cong (C') đối xứng với $(C): y = \dfrac{3x+1}{x-3}$ qua đường thẳng $d: x+y-3=0$.

Lời giải

Gọi $A(x;y)$ thuộc (C) và $B(x';y')$ thuộc (C')

Gọi I là trung điểm của AB nên có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x+x'}{2} \\ y_I = \dfrac{y+y'}{2} \end{cases}$ và $k_{AB} = \dfrac{y-y'}{x-x'}$, $k_d = -1$

Nếu (C') đối xứng với (C) qua d, thì A và B đối xứng nhau qua d

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_{AB}.k_d = -1 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y-y'}{x-x'}.(-1) = -1 \\ \dfrac{x+x'}{2} + \dfrac{y+y'}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-y' = x-x' \\ x+y+x'+y' = 6 \end{cases}; \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = y'-x' \\ y+x = -y'-x'+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x'+3 \\ x = -y'+3 \end{cases} \Rightarrow -x'+3 = 3 + \frac{10}{-y'+3-3} \Leftrightarrow y' = \frac{10}{x'}$$

Vậy, phương trình hàm số (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng d là $y = \dfrac{10}{x}$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1;4) và cắt $(C): y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm mà có hai trong ba điểm đó đối xứng nhau qua A.

Lời giải

Giả sử đường thẳng (Δ) đi qua A và cắt (C) tại ba điểm mà trong đó có hai điểm $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ đối xứng nhau qua A.

Ta có M,N thuộc (C) và M,N đối xứng nhau qua A nên chúng là giao điểm của (C) và ảnh (C') của (C) qua phép đối xứng S_A.

Phương trình của (C') là $2\times 4 - y = (2\times 1 - x)^3 - 3(2\times 1 - x) + 2 \Leftrightarrow y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

Vì M,N là giao điểm của (C) và (C') nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - 6x^2 + 9x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Thực hiện phép chia $(x^3 - 3x + 2)$ cho $(3x^2 - 6x - 1)$ ta được

$$x^3 - 3x + 2 = (3x^2 - 6x - 1)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Vì M,N thuộc (C) và x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x - 1 = 0$ nên

$$\begin{cases} y_1 = (3x_1^2 - 6x_1 - 1)\left(\dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{4}{3}x_1 + \dfrac{8}{3} \\ y_2 = (3x_2^2 - 6x_2 - 1)\left(\dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{4}{3}x_2 + \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{4}{3}x_1 + \dfrac{8}{3} \\ y_2 = \dfrac{4}{3}x_2 + \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Suy ra phương trình của đường thẳng $(\Delta) \equiv (MN)$ là $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (Δ) là $x^3 - 3x + 2 = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

Phương trình này có ba nghiệm là $x = -2, x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Gọi (C') là đồ thị đối xứng với (C) qua điểm A(3;4). Tìm phương trình đồ thị (C').

Lời giải

Gọi $M(x,y) \in (C)$ và $M'(x',y') \in (C')$ đối xứng qua đồ thị (C) qua điểm A(3;4).

Ta có $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = 3 \\ \dfrac{y+y'}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - x' \\ y = 8 - y' \end{cases}$

Thay vào đồ thị $(C): 8 - y' = \dfrac{(6-x')^2 - (6-x') + 1}{6 - x' - 1} = \dfrac{x'^2 - 11x' + 31}{5 - x'}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Hay $y'=8-\frac{x'^2-11x'+31}{5-x'}=\frac{9+3x'-x'^2}{5-x'}$.

Vậy phương trình đồ thị $(C'): y=\frac{-x^2+3x+9}{-x+5}=\frac{x^2-3x-9}{x-5}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{mx-4m+3}{x-m}$, cho m hai giá trị m_1 và m_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa m_1 và m_2 để một trong hai đường cong (C_{m_1}) và (C_{m_2}) suy ra từ đường kia nhờ một phép tịnh tiến.

Lời giải

$y=\frac{mx-4m+3}{x-m}=m+\frac{m^2-4m+3}{x-m}, x\neq m$

Xét trường hợp $m\neq 1, m\neq 3$.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x=X+m \\ y=Y+m \end{cases}$

Phương trình đường cong (C_m) đối với hệ tọa độ IXY là:

$Y+m=m+\frac{m^2-4m+3}{(X+m)-m}$ hay $Y=\frac{m^2-4m+3}{X}$.

Phương trình (C_{m_1}) đối với hệ tọa độ $I_1XY: Y=\frac{m_1^2-4m_1+3}{X}$

Phương trình (C_{m_2}) đối với hệ tọa độ $I_2XY: Y=\frac{m_2^2-4m_2+3}{X}$

Một trong hai đường cong (C_{m_1}) và (C_{m_2}) suy ra từ đường kia nhờ một phép tịnh tiến khi và chỉ khi: $m_1^2-4m_1+3=m_2^2-4m_2+3$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2)(m_1+m_2-4)=0 \Leftrightarrow m_1=m_2$ hoặc $m_1+m_2=4$

Khi $m_1=1\Rightarrow m_2=1$ hoặc $m_2=3$. Khi $m_1=3\Rightarrow m_2=1$ hoặc $m_2=3$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Lập phương trình đường cong (C') đối xứng với

1. $(C): y=\frac{x^2+x-3}{x+2}$ qua điểm $I(-1;1)$. 2. $(C): y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}$ qua điểm $I(0;2)$.

Bài 2: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+1$. Viết phương trình của (C') với

1. (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}=(1;2)$.
2. (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm I(–1;1).
3. (C') là ảnh của qua phép đối xứng trục (d) với (d) là đường thẳng phương trình x = 2.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Định nghĩa. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạ $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$. Đường thẳng $y=y_0$ là ***đường tiệm cận ngang*** của đ thị hàm số y = f(x) nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mã $\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Định nghĩa. Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là ***đường tiệm cận đứng*** của đồ thị hàm s $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ hoặc $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ hoặc $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ hoặc $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.

III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Định nghĩa

Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là ***đường tiệm cận xiên*** của đồ thị hàm s $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=[f(x)-(ax+b)]=0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x)=[f(x)-(ax+b)]=0$$

Trong đó $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

hoặc $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Phương pháp.

1. Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Thực hiện theo các bước sau

B1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$

B2. Tìm các giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới các biên của miền xác định và dựa và định nghĩa của các đường tiệm cận để kết luận

Chú ý. Đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận ngang khi tập xác định của nó là một khoảng v hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến x có thể tiến đến $+\infty$ hoặc $-\infty$)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận đứng khi tập xác định của nó có một trong các dạng sau: (a;b),[a;b), (a;b], (a; +∞) ; (−∞; a) hoặc là hợp của các tập hợp này và tập xác định không có một trong các dạng sau: R, [c; +∞), (−∞; c], [c;d]

2. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Thực hiện theo các bước sau

B1. Tìm tập xác định của hàm số *(đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận xiên nếu tập xác định của nó là là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn)*

B2. Sử dụng định nghĩa

Hoặc sử dụng định lí :

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$

và $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$ thì đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số f

CHÚ Ý: Đối với hàm phân thức: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó P(x), Q(x) là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

i) Tiệm cận đứng.

Nếu $\begin{cases}P(x_0)\neq 0\\ Q(x_0)=0\end{cases}$ thì đường thẳng: $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

ii) Tiệm cận ngang

Nếu bậc của P(x) bé hơn bậc của Q(x) thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ

Nếu bậc của P(x) bằng bậc của Q(x) thì đồ thị hàm có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\frac{A}{B}$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của P(x) và Q(x)

Nếu bậc của P(x) lớn hơn bậc của Q(x) thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang

iii) Tiệm cận xiên

Nếu bậc của P(x) bé hơn hay bằng bậc của Q(x) hoặc lớn hơn bậc của Q(x) từ hai bậc trở lên thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên

Nếu bậc của P(x) lớn hơn bậc của Q(x) một bậc và P(x) không chia hết cho Q(x) thì đồ thị hàm có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia P(x) cho Q(x) và viết

$f(x)=ax+b+\frac{R(x)}{Q(x)}$, trong đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}=0$.

Suy ra đường thẳng: $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Chú ý:

1. Xét hàm số $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$.

* Nếu $a<0\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* Nếu $a>0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ khi $x\to+\infty$ và $y=-\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ khi $x\to-\infty$.

2. Đồ thị hàm số $y=mx+n+p\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ có tiệm cận là đường thẳng:

$$y=mx+n+p\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|.$$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm tiệm cận của hàm số:

1. $y=\frac{2x+1}{x+1}$ 2. $y=\frac{2-4x}{1-x}$ 3. $y=2x+1-\frac{1}{x+2}$ 4. $y=\frac{x^2}{1-x}$

Lời giải

1. $y=\frac{2x+1}{x+1}$

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=2$, suy ra đường thẳng $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C).

$\lim\limits_{x\to-1^+}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}y=+\infty$, suy ra đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

2. $y=\frac{2-4x}{1-x}$

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=4$, suy ra đường thẳng $y=4$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C).

$\lim\limits_{x\to1^+}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$, suy ra đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

3. $y=2x+1-\frac{1}{x+2}$

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to-2^-}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+}y=-\infty\Rightarrow$ Đường thẳng: $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(2x+1)]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(2x+1)]=0\Rightarrow$ Đường thẳng $y=2x+1$ là tiệm cận xiên của (C).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. $y=-x-1+\frac{1}{1-x}$

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} y=-\infty \Rightarrow$ Đường thẳng: $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(-x-1)]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(-x-1)]=0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y=-x-1$ là tiệm cận xiên của (C).

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận của hàm số:

1. $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 2. $y=\sqrt{x^2-2x+2}$ 3. $y=x+\sqrt{x^2-1}$

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-} y=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=+\infty\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to0^-$ và $x\to0^+$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2}=0\Rightarrow$ hàm số y không có tiệm cận xiên khi $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2}=0\Rightarrow$ hàm số y không có tiệm cận xiên khi $x\to+\infty$

2. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=-1\Rightarrow y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=-1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=1\Rightarrow y=-x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

3. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0\Rightarrow y=2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1. $y=\frac{3x+2}{x-2}$ 2. $y=\frac{-2x-5}{3x+1}$

Bài 2: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1. $y=x+1-\frac{1}{x-5}$ 2. $y=\frac{2x^2-6x+1}{3x+1}$

Bài 3: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1. $y=\frac{2x+3}{x^2-4}$ 2. $y=\frac{4x}{x^2+8}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 4: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1. $y=\frac{2x-4}{x^3+1}+2x-3$ 2. $y=\frac{x^3+2}{x^2-2x}$

Bài 5: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1. $y=\frac{2x^3-x+4}{x^2-4}$ 2. $y=\frac{x^2+x+2}{x^2-2x+3}$

Bài 6: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1. $y=x+4+\sqrt{x^2-3x+2}$ 3. $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

2. $y=3x+\sqrt{x^2+4}$

Vấn đề 2 Một số dạng toán khác

Các ví dụ

Ví dụ 1.

1. Cho hàm số $y=2x+1-\frac{1}{x+2}$ có đồ thị là (C). Gọi M là một điểm bất kì thuộc (C). Qua M vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với hai đường tiệm cận của (C), hai đường thẳng này tạo với hai đường tiệm cận một hình bình hành, chứng minh hình bình hành này có diện tích không đổi.

2. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số $y=mx+\frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Gọi MNIP là hình bình hành tạo bởi hai tiệm cận của (C) và hai đường thẳng vẽ từ M lần lượt song song với hai tiệm cận này.

$M\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;2x_0+1-\frac{1}{x_0+2}\right)$

$\begin{cases}N\in TCX\\ MN\perp Ox\end{cases}\Rightarrow N(x_0;2x_0+1)\Rightarrow MN=|y_M-y_N|=\left|\frac{1}{x_0+2}\right|$

Đường thẳng MN qua M và song song với TCĐ nên có phương trình là:

$x-x_0=0\Rightarrow d(I,MN)=|-2-x_0|=|2+x_0|$.

Diện tích của hình bình hành MNIP: $S=MN.d(I,MN)=\left|\frac{1}{x_0+2}\right||x_0+2|=1$ (hằng số).

2. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ta có: $y'=m-\frac{1}{x^2}, x\neq 0$.

Để hàm số đã cho có cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

Với $m>0$ thì $y'=0\Leftrightarrow m-\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x_1=-\frac{1}{\sqrt{m}}<x_2=\frac{1}{\sqrt{m}}$ và điểm cực tiểu của hàm số là $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}};2\sqrt{m}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ nên $(d):y=mx$ là đường cận xiên.

$d(A,(d))=\frac{2}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow\frac{\left|m\frac{1}{\sqrt{m}}-2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sqrt{17}.m=2\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow 4m^2-17m+4=0\Leftrightarrow m=4$ hoặc $m=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2.

1. Cho hàm số $y=\frac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ **(1)**. Tìm m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số **(1)** tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

2. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(m^2+m+2)x+m^2+3}{x+1}$. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để khoảng cách từ gốc O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Ta có: $y=-x-m+\frac{m^2-m+1}{1-x}$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(-x-m)]=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(-x-m)]=0$ nên đường thẳng (d) $y=-x-m$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1).

(d) cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0;-m)$ và $B(-m;0)$.

Diện tích tam giác OAB: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}|y_A|.|x_B|=\frac{1}{2}m^2$.

Theo giả thiết ta có: $S=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm1$.

2. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

$y=\frac{mx^2+(m^2+m+2)x+m^2+3}{x+1}=mx+m^2+2+\frac{1}{x+1}, x\neq-1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ nên $(d): y=mx+m^2+2 \Leftrightarrow (d): mx-y+m^2+2=0$ là đường cận xiên hoặc ngang của hàm số.

Ta có: $d(O;d)=\frac{|m^2+2|}{\sqrt{|m^2+1|}}=\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\ge 2$

Vậy $d(O;d)$ nhỏ nhất bằng 2 khi $\sqrt{m^2+1}=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow m=0$.

Khi đó hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

Ví dụ 3.

1. Cho hàm số $y=\frac{1-x^2}{x}$ có đồ thị là (C). Tìm các điểm M thuộc (C) sao cho $d(M,TCĐ)=\sqrt{2}d(M,TCX)$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-3}$, có đồ thị là (C). Tìm tất cả các điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

3. Tìm trên đồ thị $(C): y=\frac{x+2}{x-3}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\frac{1}{5}$ khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$M\in(C)\Leftrightarrow M\left(x_0;-x_0+\frac{1}{x_0}\right)$. Ta có: $d(M;TCX)=\left|\frac{1}{\sqrt{2}x_0}\right|$, $d(M,TCĐ)=|x_0|$

$d(M,TCĐ)=\sqrt{2}d(M,TCX)\Leftrightarrow|x_0|=\sqrt{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}x_0}\right|\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\to y_0=0\\x_0=-1\to y_0=0\end{array}\right.$

Vậy, các điểm cần tìm là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;0)$.

2. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

Giả sử $M\left(x_0;1+\frac{5}{x_0-3}\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C), $x_0\ne3$.

Khi đó khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_1=|x_0-3|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $d_2=\frac{5}{|x_0-3|}$

Theo giả thiết $d_1=5d_2$ hay $|x_0-3|=\frac{25}{|x_0-3|}\Leftrightarrow(x_0-3)^2=25$, phương trình này có 2 nghiệm $x_0=-2$ hoặc $x_0=8$

Vậy, $M(-2;0)$, $M(8;2)$ là tọa độ cần tìm.

3. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

Gọi đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là $(d_1): x=3, (d_2): y=1$.

$M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\frac{x_0+2}{x_0-3}\right)$

Ta có $d(M,d_1)=|x_0-3|, d(M,d_2)=\left|\frac{x_0+2}{x_0-3}-1\right|=\left|\frac{5}{x_0-3}\right|$

Theo bài ra ta có $|x_0-3|=\frac{1}{5}\left|\frac{5}{x_0-3}\right|\Leftrightarrow(x_0-3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=4\\x_0=2\end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn $M_1(2;-4), M_2(4;6)$.

Chú ý:

1. $d(M,d_1).d(M,d_2)=|x_0-3|.\left|\frac{5}{x_0-3}\right|=5$

2. $d(M,d_1)+d(M,d_2)\ge2\sqrt{d(M,d_1).d(M,d_2)}=2\sqrt{5}$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{3-2x}{x}$ có đồ thị là (C). Tìm các điểm trên (C) có tổng các khoảng cách từ đó đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$A\in(C)\Rightarrow A(x_0;y_0)$ với $y_0=-2+\frac{3}{x_0}$, $d(A,Ox)=|y_0|$, $d(A,Oy)=|x_0|$

$T=d(A,Ox)+d(A,Oy)=|y_0|+|x_0|$.

Nếu A thuộc nhánh trái của (C) thì $y_0<-2$ khi đó $T>2$. Mặt khác giao điểm của (C) với trục Ox là $E\left(\frac{3}{2};0\right)$, vì $d(E,Ox)+d(E,Oy)=\frac{3}{2}<2$, suy ra điểm cần tìm thuộc nhánh phải của (C).

Như vậy ta chỉ cần xét các điểm A thuộc nhánh phải của (C) ($x_0>0$).

Khi đó $T=|y_0|+x_0=\left|-2+\frac{3}{x_0}\right|+x_0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số T trên $(0;+\infty)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

* Nếu $-2+\dfrac{3}{x_0}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2x_0}{x_0}\ge 0 \Leftrightarrow x_0\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$ thì $T=-2+\dfrac{3}{x_0}+x_0$

Ta có: $T'=-\dfrac{3}{x_0^2}+1=\dfrac{x_0^2-3}{x_0^2}<0$ với mọi $x_0\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$

* Nếu $-2+\dfrac{3}{x_0}\le 0 \Leftrightarrow x_0\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ thì $T=2-\dfrac{3}{x_0}+x_0$

Ta có: $T'=\dfrac{3}{x_0^2}+1>0$ với mọi $x_0\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

* Tại $x_0=\dfrac{3}{2}$: $T'\left(\dfrac{3}{2}^+\right)=\dfrac{7}{3}$, $T'\left(\dfrac{3}{2}^-\right)=-\dfrac{1}{3}$

Vì $T'\left(\dfrac{3}{2}^+\right)\ne T'\left(\dfrac{3}{2}^-\right)$ nên $T'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ không tồn tại.

Bảng biến thiên của hàm số T.

x_0	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
T'	$-$	‖	$+$
T	↘	$\dfrac{3}{2}$	↗

Suy ra $\min T=\dfrac{3}{2}$ đạt được khi $x_0=\dfrac{3}{2}$. Vậy điểm cần tìm là $E\left(\dfrac{3}{2};\,0\right)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số: $y=\dfrac{2m-x}{x+m}$ có đồ thị là (C_m). Cho $A(0;1)$ và I là tâm đối xứng. Tìm m để trên (C_m) tồn tại điểm B sao cho tam giác ABI vuông cân tại A.

Lời giải

Xét $B\left(b;\dfrac{2m-b}{b+m}\right)\in(C_m)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(b;\dfrac{m-2b}{m+b}\right)$. Ta có $I(-m;-1)\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(-m;-2)$.

Tam giác ABI vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=0\\ AB^2=AI^2\end{cases}$

$$\begin{cases}mb+2\dfrac{m-2b}{m+b}=0\\ m^2+4=b^2+\left(\dfrac{m-2b}{m+b}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-2b}{m+b}=-\dfrac{bm}{2} & (1)\\ m^2+4=b^2+\dfrac{m^2b^2}{4} & (2)\end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow m^2\left(b^2-4\right)+4(b^2-4)=0\Leftrightarrow (b^2-4)(m^2+4)=0\Leftrightarrow b^2=4\Leftrightarrow b=\pm 2$.

* $b=2$ thay vào (1) ta được: $\dfrac{m-4}{m+2}=-m\Leftrightarrow m^2+3m-4=0\Leftrightarrow m=1, m=-4$.

* $b=-2$ thay vào (1) ta được: $\dfrac{m+4}{m-2}=m\Leftrightarrow m^2-3m-4=0\Leftrightarrow m=-1, m=4$.

Vậy $m=\pm 1$, $m=\pm 4$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 6: Tùy theo giá trị của tham số $m\in\mathbb{R}$. Hãy tìm tiệm cận của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x-1}{mx^3-1}$.

Lời giải

* $m=0\Rightarrow y=-x+1\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* $m=1\Rightarrow y=\dfrac{x-1}{x^3-1}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}y=\lim\limits_{x\to 1^-}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

* $\begin{cases}m\ne 0\\ m\ne 1\end{cases}\Rightarrow$ hàm số xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}}\right\}$

Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đường thẳng $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$, (C_m) với $m\in\mathbb{R}$.

1. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị (C_m) bằng 45^0
2. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên tạo cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác ΔAOB có diện tích bằng 4.

Lời giải

Ta có: $y=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận $\Leftrightarrow 6m-2\ne 0\Leftrightarrow m\ne\dfrac{1}{3}$.

Phương trình hai đường tiệm cận là: $\Delta_1: x=-3m\Leftrightarrow x+3m=0$

Và $\Delta_2: y=mx-2\Leftrightarrow mx-y-2=0$.

Véc tơ pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}=(1;0), \overrightarrow{n_2}=(m;-1)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

1. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 45^0 khi và chỉ khi $\cos 45^0 = \cos\frac{|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$

$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2+1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

2. Hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó: $A(0;-2), B\left(\frac{2}{m};0\right)$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}OA.OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.|-2|.\left|\frac{2}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Vậy $m = \pm\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{4x+1}{3-x}$.

1. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của nó là một hằng số.
2. Tìm các điểm thuộc (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Bài 2: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2+(3-m)x+m^2-2}{x-1}$, m là tham số. Khi (C) có tiệm cận xiên, gọi đường tiệm cận xiên này là (d). Tìm m để

1. (d) đi qua điểm A(1; 4).
2. (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.
3. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$.

Bài 3: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{(m+1)x^2+(2m+1)x+m+2}{x+1}$.

1. Tìm m để tích các khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai đường tiệm cận của nó bằng 2.
2. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc parabol (P): $y = -x^2$.
3. Khi (C) có tiệm cận xiên, tìm m để tiệm cận xiên tiếp xúc với đường tròn $(\gamma): x^2+y^2 = \frac{1}{4}$.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm những điểm nằm trên (C) cách đều hai trục tọa độ
2. Tìm những điểm M nằm trên (C), sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọ độ nhỏ nhất.
3. Tìm hai điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.
4. Tìm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y+1=$ bằng $\frac{12}{5}$.

Bài 5:

1. Tìm giá trị tham số m sao cho $y = \frac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với h trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
2. Tìm giá trị tham số m sao cho $y = 2mx+m+2-\frac{m^2+1}{x+1}$ có tiệm cận xiên cách gố tọa độ O một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cậ ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diệ tích là 2.

Bài 7:

1. Cho đường cong (C_m): $y = -\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{mx-1}$ và đường thẳng (d_m): $y = mx-m+$ Tìm tham số m để (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên của nó tạo vớ đường thẳng (d_m) một góc 45^0.

2. Cho hàm số $y = \frac{mx^2+x+1}{x+1}$. Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số cùng với trục hoành tạo thành một ta giác vuông có một góc 60^0.

Bài 8: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2+(3m+1)x-m+2}{x+1}$ có tiệm cậ xiên là (d) và (d) tiếp xúc với đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

* Xét chiều biến thiên của hàm số:
  + Tính đạo hàm y′;
  + Tìm các điểm tại đó đạo hàm y′ bằng 0 hoặc không xác định;
  + Xét dấu đạo hàm y′ và suy ra chiều biến thiên của hàm số
* Tìm cực trị
* Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có)
* Lập bảng biến thiên. (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên)

3. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số (bước này chỉ thực hiện với hàm bậc ba)

+ Tính y″
+ Giải phương trình $y''=0$
+ Lập bảng xét dấu y″

4. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ

CHÚ Ý.

1. Nếu hàm số tuần hoàn với chu kì T thì chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị trên một chu kì, sau đó tịnh tiến đồ thị song song với trục Ox
2. Nên tính thêm toạ độ một số điểm, đặc biệt là giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ
3. Nên lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị để vẽ cho chính xác

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Hàm số bậc ba và vấn đề liên quan

HÀM SỐ BẬC BA: $y=ax^3+bx^2+cx+d$

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

2. Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$, $\Delta'=b^2-3ac$

$\Delta'>0$: Hàm số có 2 cực trị.

$\Delta'\le 0$: Hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\mathbb{R}$.

3. Đạo hàm cấp 2: $y''=6ax+2b$, $y''=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{3a}$

$x=-\frac{b}{3a}$ là hoành độ điểm uốn, đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

4. Giới hạn: Nếu $a>0$ thì: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$

Nếu $a<0$ thì: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$

5. Bảng biến thiên và đồ thị:

Trường hợp $a>0$:

* $\Delta'=b^2-3ac>0$: Hàm số có 2 cực trị
* $\Delta'=b^2-3ac\le 0\Rightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$: Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp $a<0$:

* $\Delta'=b^2-3ac>0$: Hàm số có 2 cực trị.
* $\Delta'=b^2-3ac\le 0\Rightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$: Hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R}$.

Một số tính chất của hàm số bậc ba

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi: $\Delta'=b^2-3ac>0$.

2. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'=b^2-3ac\le 0\end{cases}$

3. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'=b^2-3ac\le 0\end{cases}$

4. Để tìm giá cực trị ta lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$: $f(x)=f'(x).g(x)+rx+q$

Nếu $x_1;x_2$ là hai nghiệm của $f'(x)$ thì: $f(x_1)=rx_1+q$; $f(x_2)=rx_2+q$

Khi đó đường thẳng đi qua các điểm cực trị là $y=rx+q$.

5. Đồ thị luôn có điểm uốn I và là tâm đối xứng của đồ thị.

6. Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị có giá trị tại điểm cực trị trái dấu nhau.

7. Đồ thị cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có hai cực trị và một cực trị nằm trên Ox.

8. Đồ thị cắt Ox tại một điểm $\Leftrightarrow$ hoặc hàm số không có cực trị hoặc hàm số có hai cực trị cùng dấu.

9. Tiếp tuyến: Gọi I là điểm uốn. Cho $M\in(C)$

* Nếu $M\equiv I$ thì ta có đúng một tiếp tuyến đi qua M và tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất (nếu $a>0$), lớn nhất (nếu $a<0$).
* Nếu M khác I thì có đúng 2 tiếp tuyến đi qua M.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Các ví dụ

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

1. $y=-x^3+3x^2-4$. 2. $y=-x^3+3x^2$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x$

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

- Chiều biến thiên:

$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$;

$y'=0\Leftrightarrow -3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$

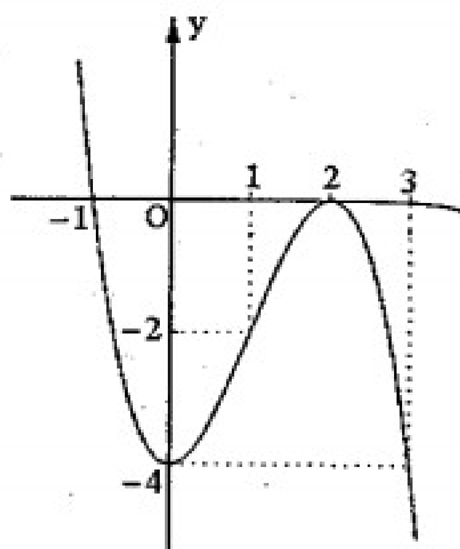
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$;

giá trị cực đại của hàm số là $y(2)=0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$;

giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=-4$



Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	−4	↗	0	↘	$-\infty$

- Đồ thị: Cho $x=-1\Rightarrow y=0$; $x=3\Rightarrow y=-4$

2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

- Chiều biến thiên:

$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$;

$y'=0\Leftrightarrow -3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$

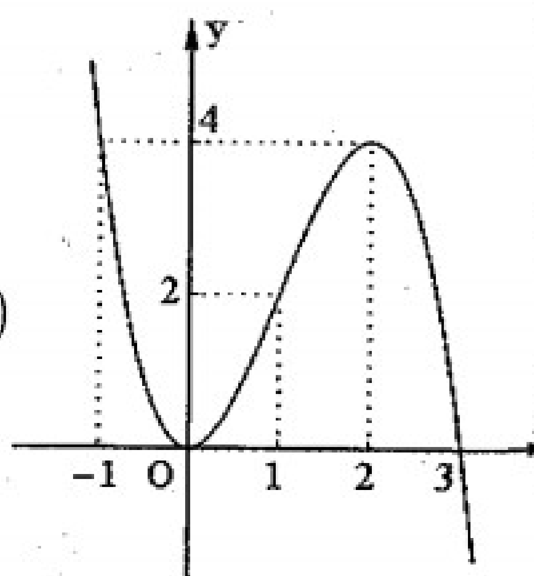
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$;

giá trị cực đại của hàm số là $y(2)=4$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$;

giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=0$.



Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

- Đồ thị:

Cho $x=-1\Rightarrow y=4$; $x=3\Rightarrow y=0$.

3. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

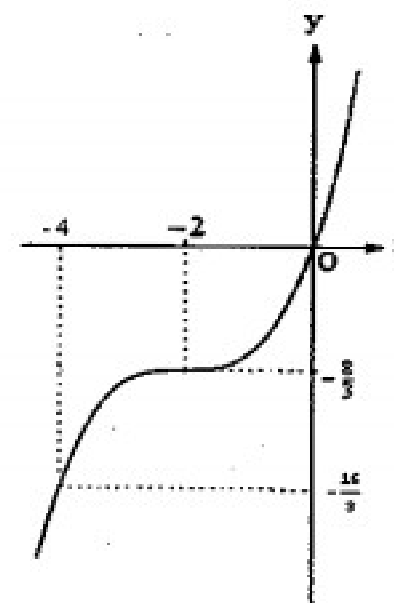
- Chiều biến thiên:

Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

Ta có: $y'=x^2+4x+4=(x+2)^2\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số không có cực trị.



- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		−2		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{8}{3}$	↗	$+\infty$

- Đồ thị: Cho $x=0\Rightarrow y=0$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(3;1)$.

Lời giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Chiều biến thiên:

Ta có: $y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0\Leftrightarrow -3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$

$y'>0\Leftrightarrow x\in(0;2)$; $y'<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(2) = 5$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 1$.

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

- Đồ thị:

Cho $x = -1 \Rightarrow y = 5$; $x = 3 \Rightarrow y = 1$.

2. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(3;1)$ có dạng:

$$y - 1 = y'(3).(x-3) \Leftrightarrow y = -9(x-3) + 1 \Leftrightarrow y = -9x + 28$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$, trong đó *m* là tham số
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m = 0$;
2. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

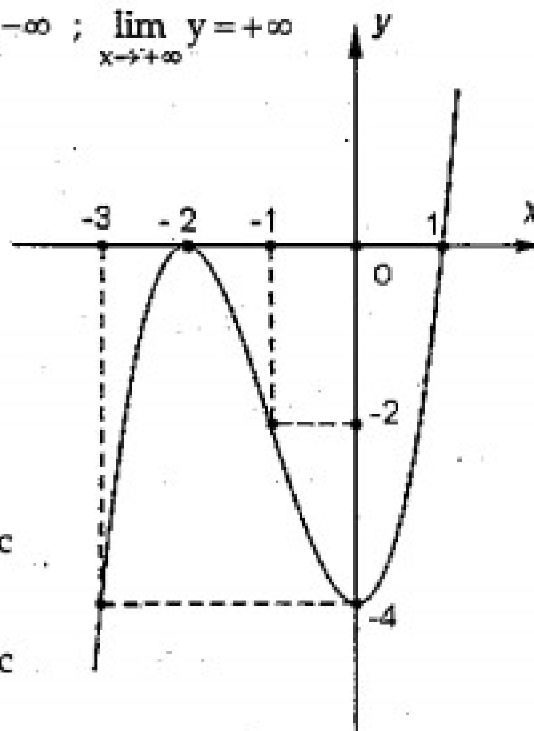
Lời giải

1. Khi $m = 0$ thì hàm số là: $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Chiều biến thiên:
  - Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$
  - Bảng biến thiên:

    + $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$,

    $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = -4$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	–	0	–	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho $x = -3 \Rightarrow y = -4$; $x = 1 \Rightarrow y = 0$

2. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x \in (-\infty; 0)$.

Xét: $g(x) = 3x^2 + 6x - m$, $x \in (-\infty; 0)$

$g'(x) = 6x + 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		–	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	$-3-m$	↗	$-m$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$$y' = g(x) = 3x^2 + 6x - m \geq 0 , \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow -3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$$

Vậy khi $m \leq -3$ thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn.

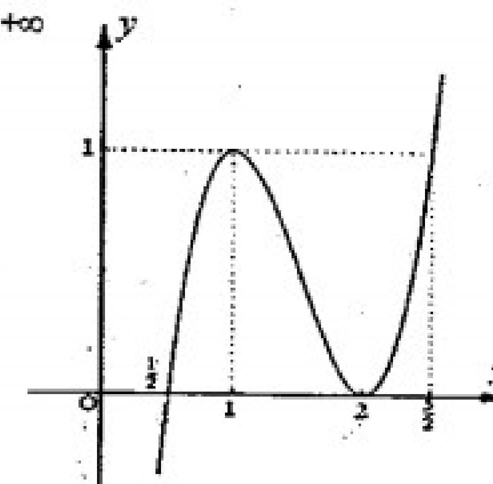
Ví dụ 4. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị (C)
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;
2. Tìm *m* để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Lời giải

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

+ Đồ thị:



2. Ta có: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

$\Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$

Gọi $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

và $(C'): y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

http://sachxua.edu.vn

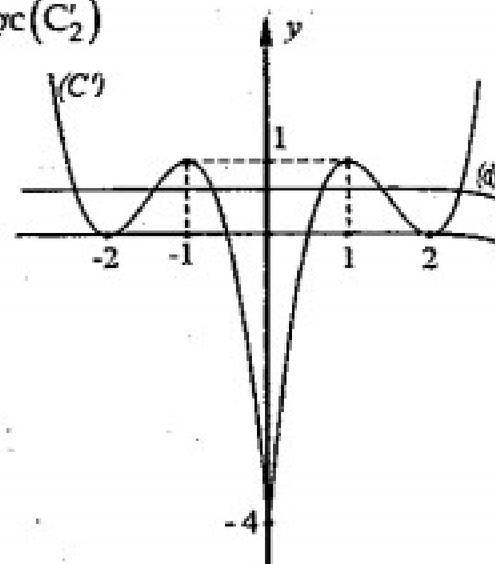
www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta thấy khi $x \ge 0$ thì: $(C'): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Mặt khác hàm số của đồ thị *(C')* là hàm số chẵn nên *(C')* nhận *Oy* là trục đối xứng.

Từ đồ thị *(C)* ta suy ra đồ thị *(C')* như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị *(C)* bên phải trục *Oy*, ta được (C_1')
- Lấy đối xứng qua trục *Oy* phần (C_1'), ta được (C_2')
- $(C') = (C_1') \cup (C_2')$



Số nghiệm của phương trình:

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$$

$$\Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$$

là số giao điểm của đồ thị *(C')* và đường thẳng $(d): y = m - 4$.

Từ đồ thị *(C')*, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2$ có đồ thị là (C_m), m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) khi $m = -3$.
2. Tùy theo k giải và biện luận phương trình: $-|x|^3 + 3x^2 + k = 0$.
3. Gọi A và B là hai điểm cực trị của (C), tìm điểm M trên (C) sao cho tam giác MAB cân tại M.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$
* Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$
* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	−2	↗	$+\infty$

Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -2$.

* Đồ thị
* Điểm uốn:: $y'' = 6x - 6$ và $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x = 1$.

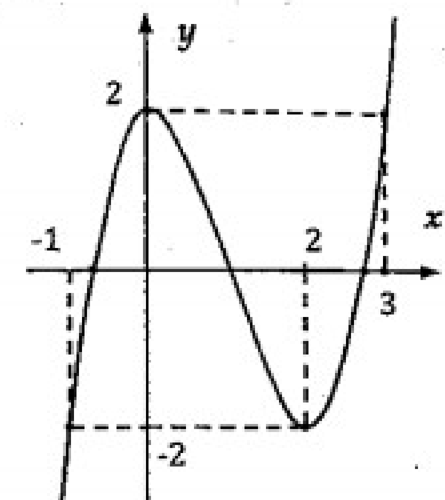
Vậy $I(1;0)$ là điểm uốn của đồ thị.

* Giao điểm của đồ thị với trục tọa độ

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là điểm $(0;2)$

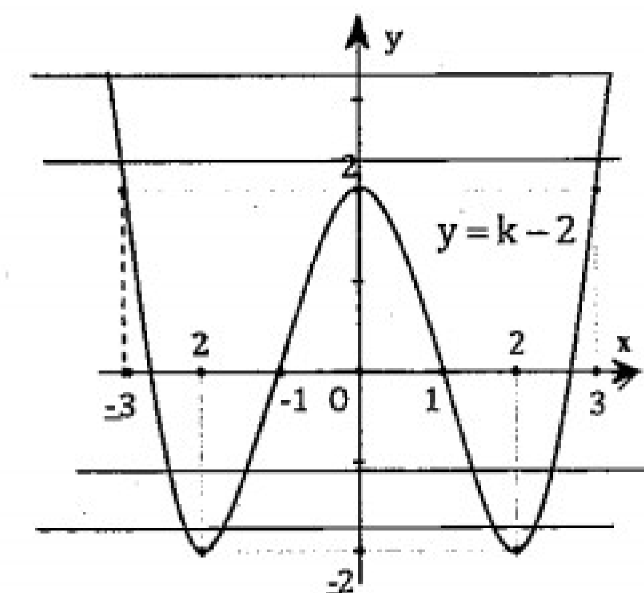
Đồ thị cắt Ox tại ba điểm $(1;0), (1 \pm \sqrt{3};0)$

* Chọn $x = 3 \Rightarrow y = 2$, $x = -1 \Rightarrow y = -2$.



Nhận xét: Đồ thị nhận $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.

2. $-|x|^3 + 3x^2 + k = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = k + 2$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C'): $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng (d): $y = k + 2$ $\Rightarrow$ số nghiệm của phương trình cho chính là số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} y = |x|^3 - 3x^2 + 2 & (C') \\ y = k + 2 & (d) \end{cases}$.



* $k + 2 < -2 \Leftrightarrow k < -4 \Rightarrow d$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình cho vô nghiệm.
* $\left[\begin{array}{l} k+2=-2 \\ k+2>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-4 \\ k>0 \end{array}\right. \Rightarrow d$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình cho có hai nghiệm phân biệt.
* $k + 2 = 2 \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow d$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình cho có ba nghiệm phân biệt.
* $-2 < k + 2 < 2 \Leftrightarrow -4 < k < 0 \Rightarrow d$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình cho có bốn nghiệm phân biệt.

3. Giả sử $A(0;2)$ và $B(2;-2)$ là hai điểm cực trị của (C)

Tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB$ và M, A, B không thẳng hàng.

$MA = MB \Leftrightarrow M$ thuộc trung trực $AB: x - 2y - 1 = 0$

Tọa độ M thỏa nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 2 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2 - 4x - 5) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1\left(1 + \frac{\sqrt{14}}{2}; \frac{\sqrt{14}}{4}\right) \\ M_2\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right) \end{array}\right.$$

Loại $M(1;0)$ vì M, A, B thẳng hàng.

http://sachxua.edu.vn

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 1: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị là (C)

1. Tìm m để đường thẳng $d_m: y=(2m-1)x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;-1), B, C$ sao cho $BC=\sqrt{82}$.

2. Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Bài 2. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$, trong đó m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m=0$.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
3. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số

$y=x^3+3x^2+(4m-1)x+2m^2-3$ cắt Ox tại ba điểm A, B, C sao cho $AB=BC$.

Bài 4. Tìm m để đồ thị (C_m): $y=x^3-3(m+1)x^2+3mx-m+1$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm.

Bài 5. Tìm m để đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2-(3m-1)x+m+3$ cắt đường thẳng $d: y=(1-m)x+m-5$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1<x_2<1<x_3$.

Bài 6. Cho hàm số (C) $y=x^3-5x^2+6x+3$.

1. Tìm trên đồ thị (C_2) những cặp điểm đối xứng qua O.
2. Tìm m để trên O tồn tại một cặp điểm đối xứng nhau qua Oy.

Bài 7. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+mx+3m-2$ có đồ thị (C_m).

1. Tìm trên (C_1) những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ
2. Tìm m để trên (C_m) tồn tại ít nhất một cặp điểm đối xứng nhau qua trục tung.
3. Tìm tất cả các điểm cố định họ đường cong (C_m) luôn đi qua.
4. Tìm những điểm cố định mà không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua.

Bài 8. Trên mp Oxy cho đồ thị $(C): y=x^3-2\sqrt{2}x$. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành có tất cả các đỉnh đều nằm trên (C) thì tâm của hình bình hành đó là gốc tọa độ O.

Bài 9. Biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt và $a^2>3b$. Chứng minh rằng $|27c+2a^3-9ab|<2\sqrt{(a^2-3b)^3}$.

Bài 10: Cho hàm số: $y=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x-5)$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất

Bài 11: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)
2. Tìm m để phương trình $x^3-3x^2=m$ (1) có ba nghiệm phân biệt.
3. Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C'): $y=g(x)=|x|^3-3x^2+2$.
4. Biện luận số nghiệm của phương trình: $-|x|^3+3x^2+m=0$ (2).

Bài 12: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=36x+1$.
3. Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt: $|x|^3-\frac{3}{2}x^2+m=0$.
4. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|2x^2-x-1|=\frac{m}{|x-1|}$.

Bài 13: Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+2(m+1)x^2-3(m+1)x+1$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) của hàm số (1) khi m = 0.
2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
3. Tìm các giá trị của tham số m để trên đồ thị của hàm số (1) tồn tại một cặp điểm M, N (M khác N) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O.

Bài 14: Cho hàm số $y=2x^3+(m-1)x^2+(m+2)x+1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-3$.
3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Bài 15:

1. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$, trong đó m là tham số thực.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m=0$

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3$. Chứng minh rằng phương trình $-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3=0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{17}{3}$. Chứng minh rằng phương trình $y=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $y''(x_0)=-6$. Giải bất phương trình $y'(x-1)>0$

5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$. Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm $M(4;4)$ và cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

6. Tìm hệ số a,b,c sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ là -1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a,b,c vừa tìm được.

7. Tìm các hệ số $m,n,p\in\mathbb{R}$ sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại điểm $x=3$ và đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng (d): $y=3x-\frac{1}{3}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

Dạng 2: Hàm số bậc trùng phương và vấn đề liên quan

Phương pháp giải

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG: $y=ax^4+bx^2+c$

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

2. Đạo hàm: $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2=-\frac{b}{2a}$.

* Nếu $ab\ge 0$ thì y có một cực trị $x_0=0$

* Nếu $ab<0$ thì y có 3 cực trị $x_0=0;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

3. Đạo hàm cấp 2: $y''=12ax^2+2b,\ y''=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{b}{6a}$

* Nếu $ab\ge 0$ thì đồ thị không có điểm uốn.
* Nếu $ab<0$ thì đồ thị có 2 điểm uốn.

4. Bảng biến thiên và đồ thị:

* $a>0,b<0$: Hàm số có 3 cực trị.

x	+∞		x_1		0		x_2		+∞
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	+∞	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	+∞

* $a<0,b>0$: Hàm số có 3 cực trị.

x	+∞		x_1		0		x_2		+∞
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	−∞	↗	CĐ	↘	CT	↗	CĐ	↘	−∞

* $a>0,b\ge 0$: Hàm số có 1 cực trị.

x	−∞		0		+∞
y'		−	0	+	
y	+∞	↘	CT	↗	+∞

* $a<0,b\le 0$: Hàm số có 1 cực trị.

x	−∞		0		+∞
y'		+	0	−	
y	−∞	↗	CĐ	↘	−∞

Tính chất:

* Đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\ne 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình: $aX^2+bX+c=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $X_1=9X_2$.
* Nếu đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có đỉnh nằm trên Oy.
* Nếu đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Ox cũng là tiếp tuyến của đồ thị.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$ có đồ thị (C).
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;
2. Dùng đồ thị *(C)*, hãy biện luận theo m số nghiệm thực của phương trình
$$x^4-2x^2-1=m\quad (*)$$

Lời giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Chiều biến thiên:

Ta có: $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm 1$

$y'>0\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$; $y'<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

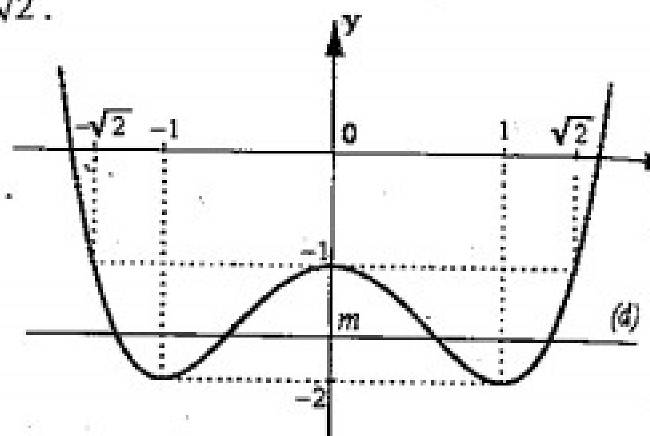
Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0)=-1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\pm1$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm1)=-2$

- Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

- Đồ thị: Cho $y=-1 \Rightarrow x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$.



2. Biện luận theo m số nghiệm thực của phương trình:

Số nghiệm của (*) là số giao điểm của *(C)* và $(d): y=m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy:

+ Khi $m<-2$ thì (*) vô nghiệm.
+ Khi $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1 \end{array}\right.$ thì (*) có 2 nghiệm.
+ Khi $-2<m<-1$ thì (*) có 4 nghiệm.
+ Khi $m=-1$ thì (*) có 3 nghiệm.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số $m=3$
2. Xác định m để đồ thị của hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải

1. Khi $m=3$ thì hàm số là: $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Chiều biến thiên:
  - Bảng biến thiên:

    + Ta có: $y'=2x^3-6x=2x(x^2-3)$

$$y'=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3};0)$ và $(\sqrt{3};+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{3})$ và $(0;\sqrt{3})$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0)=\frac{3}{2}$.

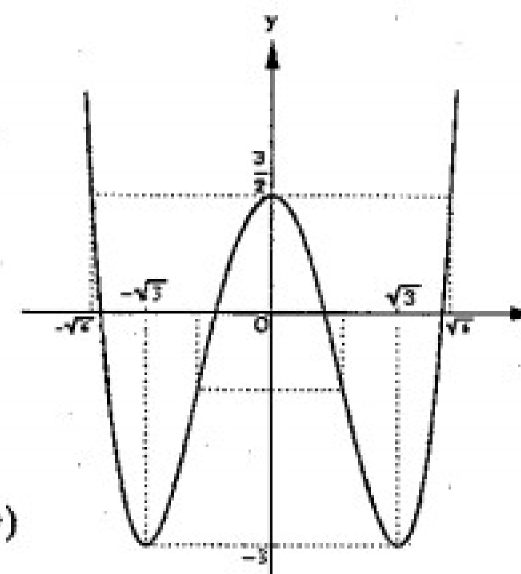
Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x=\pm\sqrt{3}$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm\sqrt{3})=-3$

- Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	$+\infty$

- Đồ thị:
  - Cho $y=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^4-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$
  - Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.
  - Đồ thị (hình vẽ):



2. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm:

$y'=2x^3-2mx$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2=m$ (*)

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại

$\Leftrightarrow y'=0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0 \Leftrightarrow m\le 0$

Vậy giá trị cần tìm là: $m\le 0$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi $m=1$;
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. $y = x^4 - 4x^2 + 1$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên:

o Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{2};0)$ và $(\sqrt{2};+\infty)$.

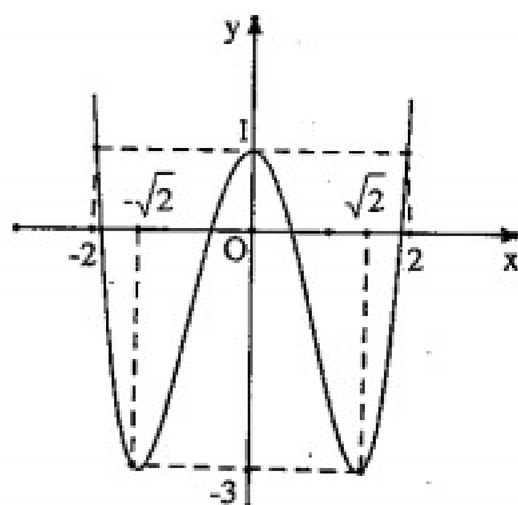
Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$; $y_{CT} = -3$, đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CĐ} = 1$

o Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	−3	↗	1	↘	−3	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2. Xét $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ $(C_m) \Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

Đồ thị của hàm số (C_m) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 4x[x^2 - m - 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m + 1$

Vì thế để thỏa mãn điều kiện trên thì phương trình $x^2 = m + 1$

Cần có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \quad (1)$$

Kết luận thỏa mãn (1), (C_m) có ba cực trị tại các điểm

$A(0, m)$, $B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$, $C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$

Lúc đó: $OA = BC \Leftrightarrow OA^2 = BC^2$ (do $OA > 0$; $BC > 0$)

$$\Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi $m = 8$;
2. Xác định m sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

1. Khi $m = 8 \Rightarrow y = x^4 - 8x^2 + 7$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Chiều biến thiên:

+ Ta có: $y' = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 2$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên cá khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 7$.

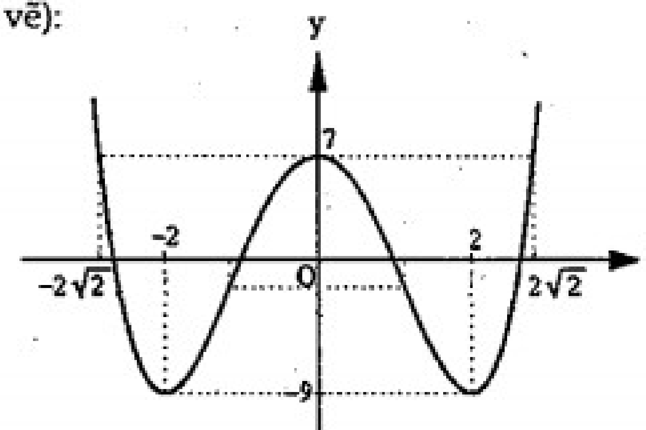
Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 2) = -9$.

o Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

o Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		−2		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	−9	↗	7	↘	−9	↗	$+\infty$

- Đồ thị (hình vẽ):



o Cho $y = 7 \Rightarrow x^4 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

o Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trụ đối xứng.

2. Gọi $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox: $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ (1)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Đặt $t = x^2,\ t \ge 0$, suy ra $(1) \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0$ (2).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 4 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \ne 2. \end{cases}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = x^4 + 3(m+1)x^2 + 3m + 2$, có đồ thị là (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) khi $m = 1$
2. Tìm các giá trị của m để (C_m) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông.

Bài 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 24y + 1 = 0$.
3. Tìm a để Parabol (P): $y = 2x^2 + a$ tiếp xúc với (C).

Bài 3: Cho hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm uốn.
3. Tìm m để phương trình $(x^2 - 5)|x^2 - 1| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Bài 4: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m)

1. Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị (3) của hàm số khi $m = 1$.
2. Tìm giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.
3. Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

Bài 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 5$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và ba điểm này là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 32.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m+1)x^2 - 4m - 4$ (1).

1. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị hàm số (1) luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào (*các điểm này gọi là các điểm cố định của đồ thị hàm số (1)*).
2. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số chỉ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại.
3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi $m = 0$.
4. Cho hai điểm $A(0;-16)$ và $B(1;-8)$. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 7:

1. Cho hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0$.
2. Cho hàm số $y = 8x^4 - 9x^2 + 1$ có đồ thị (C). Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$

Bài 8: Chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4 + 3 = 0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m. Tìm giá trị $m \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 11$.

Bài 9: Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m): $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Dạng 3: Hàm số hữu tỷ và vấn đề liên quan

Phương pháp giải

HÀM SỐ NHẤT BIẾN: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d},\ ac \ne 0$.

1. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
2. Đạo hàm: $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. Đặt $m = ad - bc$, ta có:

* Nếu $m > 0$ thì hàm số tăng trên từng khoảng xác định.
* Nếu $m < 0$ thì hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

3. Các đường tiệm cận: $x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng và $y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang.
4. Bảng biến thiên và đồ thị:

* $m > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	$\dfrac{a}{c}$ ↗ $+\infty$		||	$-\infty$ ↗ $\dfrac{a}{c}$	

$m < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		−	||	−	
y	$\dfrac{a}{c}$ ↘ $-\infty$		||	$+\infty$ ↘ $\dfrac{a}{c}$	

5. Đồ thị của hàm số nhất biến gọi là một hypebol vuông góc có tâm đối xứng $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$, là giao điểm của 2 đường tiệm cận.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

HÀM SỐ PHÂN THỨC $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x+\beta}$, $a.\alpha\neq 0$

Thực hiện phép chia đa thức ta được: $y=Ax+B+\dfrac{C}{\alpha x+\beta}$ $(a.\alpha.C\neq 0)$.

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\beta}{\alpha}\right\}$

2. Đạo hàm: $y'=A-\dfrac{C\alpha}{(\alpha x+\beta)^2}=\dfrac{A(\alpha x+\beta)^2-C\alpha}{(\alpha x+\beta)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow(\alpha x+\beta)^2=\dfrac{C\alpha}{A}$

* Nếu $\dfrac{C\alpha}{A}<0$ thì hàm số không có cực trị, hàm số tăng hoặc giảm trên từng khoảng xác định.

* Nếu $\dfrac{C\alpha}{A}>0$ thì hàm số có 2 cực trị.

3. Các đường tiệm cận: Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ và Tiệm cận xiên: $y=Ax+B$.

4. Bảng biến thiên

* $A>0$, $AC\alpha>0$: Hàm số có 2 cực trị

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{\beta}{\alpha}$		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	CT	↗	$+\infty$

* $A>0$, $C\alpha<0$: Hàm số không có cực trị

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	$-\infty$	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

* $A<0$, $C\alpha<0$: Hàm số có 2 cực trị.

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{\beta}{\alpha}$		x_2		$+\infty$
y'		−	0	+	||	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	CT	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	CĐ	↘	$-\infty$

* $A<0$, $AC\alpha<0$: Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
y'		−	||	−	
y	$+\infty$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Một số tính chất của hàm số hữu tỉ bậc 2 trên bậc 1.

Giả sử $y'=\dfrac{g(x)}{(\alpha x+\beta)^2}$ với $g(x)$ là một tam thức bậc 2 có biệt số Δ.

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu

$$\Leftrightarrow g(x) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } -\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ g\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\neq 0\end{cases}$$

2. Các cực trị là: $y_1=\dfrac{2ax_1+b}{\alpha}$; $y_2=\dfrac{2ax_2+b}{\alpha}$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của $y'=0$.

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị có phương trình: $y=\dfrac{1}{\alpha}(2ax+b)$

3. Điều kiện để 2 cực trị trái dấu là: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ và $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm.

4. Giả sử M là điểm thuộc đồ thị hàm số. Nếu tiếp tuyến với đồ thị tại M cắt 2 tiệm cận tại A, B thì ta có:

* M là trung điểm của AB và $S_{\Delta IAB}$ không đổi (I là giao điểm 2 đường tiệm cận, cũng là tâm đối xứng của đồ thị).
* Tích các khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là 1 hằng số.

Các ví dụ

> **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$, trong đó *m* là tham số thực.
> 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số với $m=1$
> 2. Với giá trị nào của *m* thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Lời giải

1. Khi $m=1$ thì hàm số là: $y=\dfrac{x+4}{x+1}$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- Chiều biến thiên:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

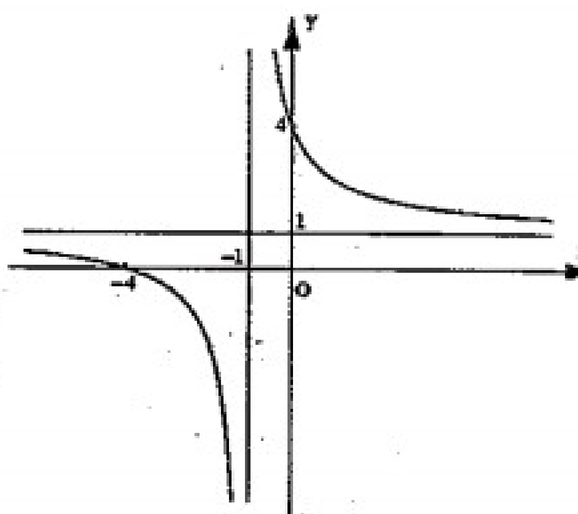
+ Ta có: $y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1), (-1;+\infty)$

- Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận:
  + Ta có: $\lim_{x\to(-1)^-} y = -\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} y = +\infty$, do đó đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to (-1)^-$ và khi $x \to (-1)^+$).
  + Ta có: $\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to+\infty} y = 1$, nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$)
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	1 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1

- Đồ thị: (hình vẽ)
- $y=0 \Rightarrow x=-4$; $x=0 \Rightarrow y=4$, tức là đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-4;0)$, cắt trục tung tại $(0;4)$.
- Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(-1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ x=-m \notin (-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\leq -1.$

Vậy giá trị cần tìm là: $-2<m\leq-1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;
2. Tìm *m* để đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Sự biến thiên:
- Chiều biến thiên: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x \in D$.

  Suy ra, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.
- Cực trị: Hàm số không có cực trị.
- Giới hạn: $\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to+\infty} y = 2$; $\lim_{x\to1^+} y = +\infty$ và $\lim_{x\to1^-} y = -\infty$.

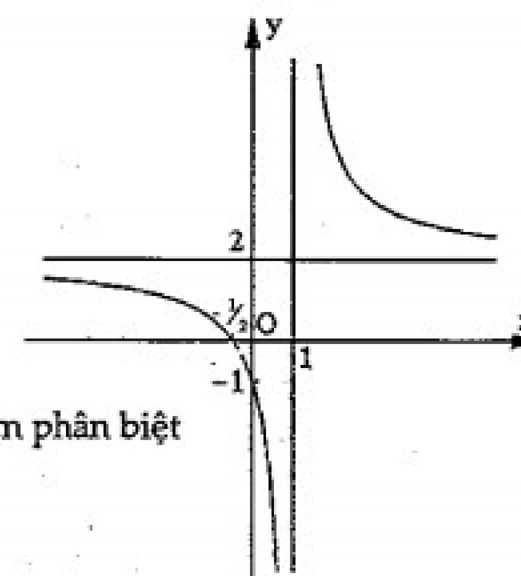
  Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng x = 1, và một tiệm cận ngang là đường thẳng y = 2.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2

- Đồ thị:

  Đồ thị cắt trục tung tại $A(0;-1)$, cắt trục hoành tại $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$

  Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.



2. Đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = -x+m$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2-(m-1)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-1)^2-4(m+1)>0 \\ 1^2-(m-1).1+m+1\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-3>0 \\ 3\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<3-2\sqrt{3} \\ m>3+2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy, với $m<3-2\sqrt{3}$ hoặc $m>3+2\sqrt{3}$ thì đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;
2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải

1. Xét hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C)

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Sự biến thiên:
  - Chiều biến thiên:

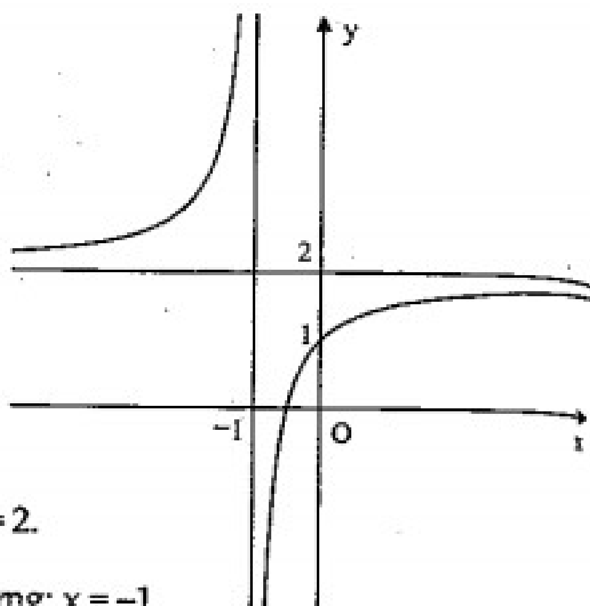
$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$; tiệm cận ngang: $y = 2$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$; tiệm cận đứng: $x = -1$



- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

2. Gọi (d) là đường thẳng $y = kx + 2k + 1$. Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình: $kx + 2k + 1 = \dfrac{2x+1}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)(kx+2k+1) = 2x+1$ (do $x = -1$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0$ (1)

Để (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì (1) cần có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (3k-1)^2 - 8k^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi k thỏa mãn (2) ta có: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$, ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1).

Ta có: $d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \text{ (do } k \neq 0) \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

Theo định lí Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{1-3k}{k}$, từ đó ta có:

$$k\frac{1-3k}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Rõ ràng $k = -3$ thỏa mãn (2), nên là giá trị duy nhất cần tìm của tham số k.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số.

   Từ đó suy ra đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2|x|}{|x|-1}$ (C_1)

2. Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình: $(m-2)|x| - m = 0$

Lời giải

1. + Bảng biến thiên:

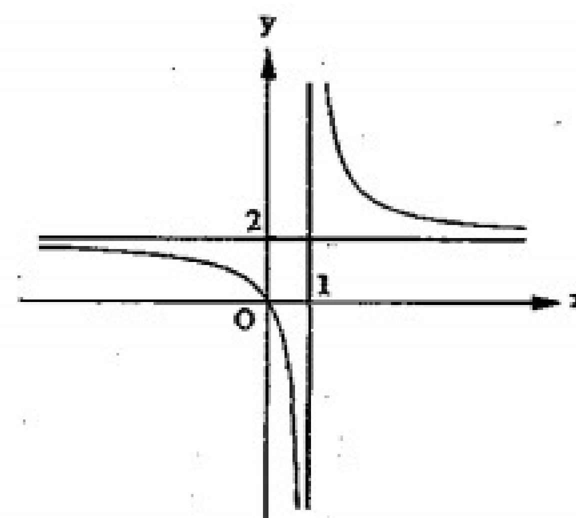
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

\+ Đồ thị *(C)*

* Ta có: $(C_1): y = \dfrac{2|x|}{|x|-1} = \dfrac{2x}{x-1}$ khi $x \geq 0$.

Mặt khác $y = \dfrac{2|x|}{|x|-1}$ là hàm số chẵn nên (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2|x|}{|x|-1}$ (C_1) gồm hai phần:



\+ Phần 1: Phần của *(C)* khi $x \geq 0$.

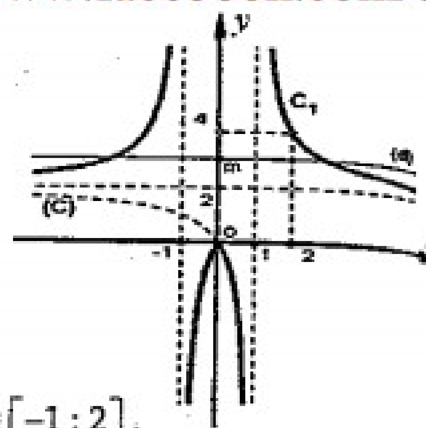
\+ Phần 2: Đối xứng của phần 1 qua Oy.

2. Ta có: $(m-2)|x| - m = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2|x|}{|x|-1} = m$ (1).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Số nghiệm $x \in [-1;2]$ của (1) là số giao điểm của (C_1) và $(d): y = m$ trên đoạn $[-1;2]$. Nhìn vào đồ thị ta thấy:



- Khi $\left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m = 0 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x \in [-1;2]$.
- Khi $m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x \in [-1;2]$.

Khi $0 < m < 4$ thì phương trình (1) không có nghiệm

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0; \dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải

1. • Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên: $y' = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

$y = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty}[y - (-x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty}[y - (-x+2)] = 0 \Rightarrow y = -x + 2$ là tiệm cận xiên.

o Bảng biến thiên:

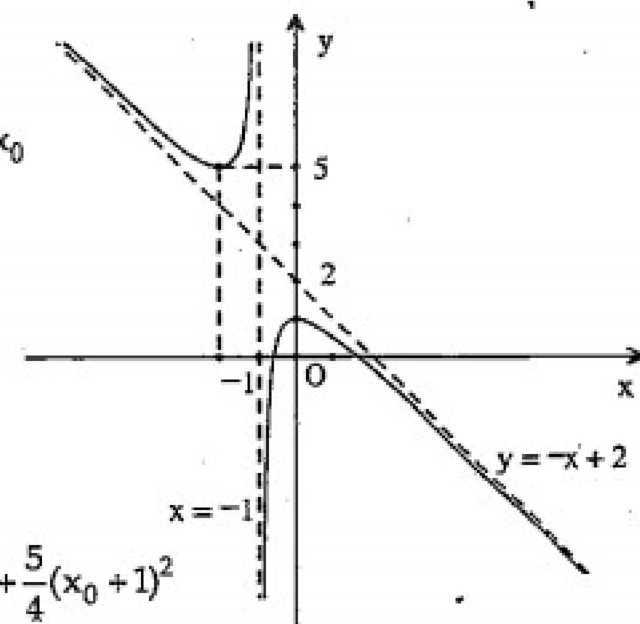
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		−	0	+	‖	+	0	−	
y	$+\infty$ ↘		5 Cực tiểu	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1 Cực đại	↘ $-\infty$	

Đồ thị nhận điểm I(−1; 3) làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại (0, 1), cắt trục Ox tại $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right), \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

2. Gọi (d) là đường thẳng $y = kx + \dfrac{5}{4}$.

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = kx_0 + \dfrac{5}{4} & (1) \\ \dfrac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$ có nghiệm x_0



Thế k từ (2) vào (1):

$$\frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0+1)^2}.x_0 + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \ne -1 \\ (-x_0^2 + x_0 + 1)(x_0 + 1) = \left(-x_0^2 - 2x_0\right)x_0 + \frac{5}{4}(x_0+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \ne -1 \\ 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Tại $x_0 = 1 \Rightarrow k = -\dfrac{3}{4}$, có tiếp tuyến (T_1): $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$.
- Tại $x_0 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow k = \dfrac{5}{4}$, có tiếp tuyến (T_2): $y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{4}$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;
2. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận về số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a$ theo các giá trị của tham số a.

Lời giải

1. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = x + 1 - \dfrac{2}{x + 1}$.

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

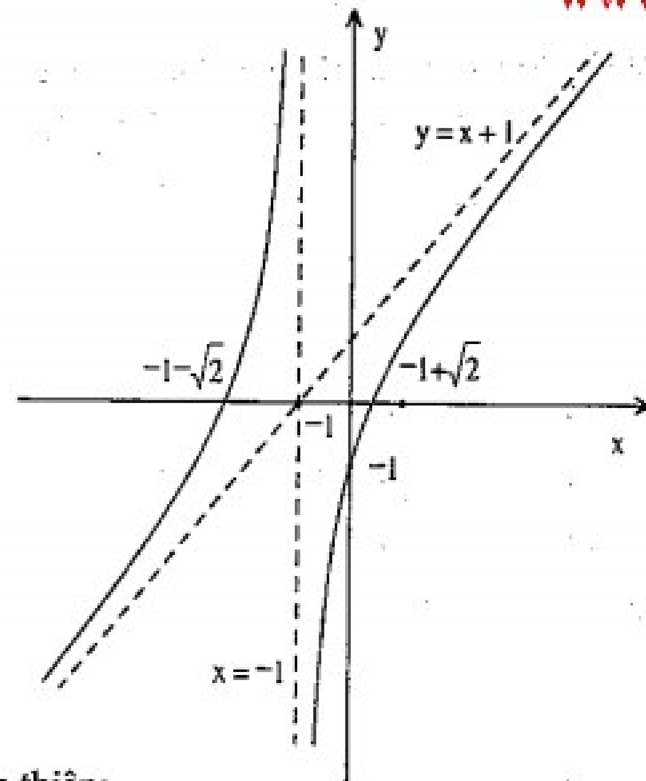
• Sự biến thiên: $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi x thuộc D: hàm số luôn luôn đồng biến trên D, không có cực đại và cực tiểu.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to -\infty}[y - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty}[y - (x+1)] = 0 \Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

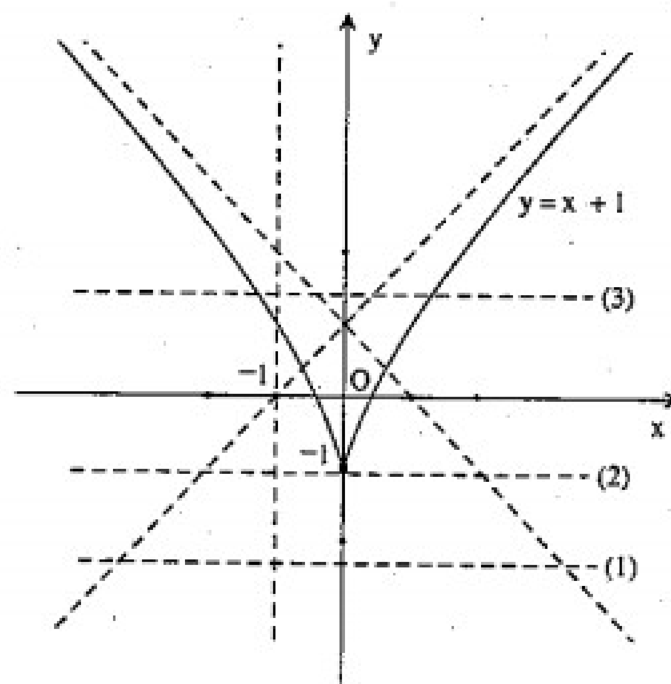


o Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Đồ thị nhận điểm I(–1; 0) làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại (0, –1), cắt trục Ox tại $\left(-1-\sqrt{2};0\right)$, $\left(-1+\sqrt{2};0\right)$.

2. $y=\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ là một hàm số chẵn (do f(–x)= f(x)) nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.



- Vẽ phần đồ thị của (1) ứng với $x \geq 0$.
- Lấy đối xứng của phần đồ thị trên qua trục Oy sẽ được đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ (hình bên).

Số giao điểm của đường thẳng y = a và đồ thị này là số nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}=a.$$

Xét qua 3 vị trí của đường thẳng y = a:

(1): $a<-1$: vô nghiệm;

(2): $a=-1$: một nghiệm $x=0$;

(3): $a>-1$: hai nghiệm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Chứng minh rằng đồ thị (C) có ít nhất hai trục đối xứng

2. Tìm tất cả những cặp điểm M, N nằm về hai nhánh của (C) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

3. Tìm tất cả những điểm K thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt A, B sao cho AB đối xứng qua đường thẳng $d: 2x+y-4=0$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi $m\in(-1;1)$ đồ thị (C_m): $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ luôn cắt đường tròn $(C): x^2+y^2=12$ tại bốn điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm a, b để đường thẳng $\Delta: y=ax+2b-4$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho M, N đối xứng nhau qua O.

2. Đường thẳng $y=x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại C, D sao cho ABCD là hình bình hành.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

1. Tìm những điểm M thuộc (C), sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 2x+y-2=0$

* Bằng $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ * Nhỏ nhất

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Tìm hai điểm A, B thuộc hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

3. Tìm $N \in (C)$ sao cho khoảng cách từ N đến Oy gấp đôi khoảng cách từ N đến Ox.

4. Tìm $A \in (C)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Bài 6. Chứng minh rằng với các điểm A, B, C phân biệt thuộc đồ thị $(C): y = -\frac{2}{x}$ thì tam giác ABC cũng có trực tâm H thuộc đồ thị (C).

Bài 7. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm những điểm nằm trên (C) cách đều hai trục tọa độ

2. Tìm những điểm M nằm trên (C), sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

3. Tìm hai điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

4. Tìm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$ bằng $\frac{12}{5}$

Bài 8. Chứng minh A, B, C thuộc $(C): y = \frac{x+1}{x-2}$ thì trực tâm H của tam giác ABC cũng thuộc (C).

Bài 9. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m)

1. Tìm những điểm cố định mà họ đồ thị (C_m) luôn đi qua.

2. Tìm tập hợp những điểm mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua.

Bài 10: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Tìm các điểm trên (C) có các tọa độ x, y đều là số nguyên.

3. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) là một số không đổi.

4. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Bài 11: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1), với m là số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2. Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$

2. Xác định tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$.

3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Bài 13: Cho hàm số $y = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$ có đồ thị là (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Chứng minh rằng đồ thị (C) nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

3. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) là một số không đổi.

Bài 14: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

3. Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) đều tạo với hai tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Bài 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x-2}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$.

Bài 16: Cho hàm số $y = \frac{2-4x}{1-x}$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Gọi M là một điểm bất kỳ của (C), d là tiếp tuyến của (C) tại M, d cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B và gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C).

a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn AB.

b) Chứng minh tam giác IAB có diện tích không đổi.

c) Tìm điểm M sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Bài 17: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm các điểm thuộc (C) cách đều hai trục tọa độ.

3. Tìm các điểm thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó ngắn nhất.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 18:

1. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(2m-1)x-1}{x+2}$ có đồ thị là $(C_m), m\in\mathbb{R}$.

a. Chứng minh rằng với mọi $m>0$ hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

b. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m=1$.

c. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số biết tiếp tuyến đi qua $A(1;0)$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ (1)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1)

b. Tìm trên đường thẳng $y=4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Bài 19: Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Bài 20: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$.

Bài 21: Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+1$ cắt đồ thị $(C): y=\frac{x^2+4x+3}{x+2}$ tại 2 điểm phân biệt A,B. Tìm quỹ tích trung điểm I của A,B.

Bài 22: Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của (C) sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất

2. Tìm m để trên đồ thị (C) tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases}2x_A+y_A=m\\2x_B+y_B=m\end{cases}$$

Bài 23: Cho hàm số: $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi (C') là đồ thị đối xứng với (C) qua điểm $A(3;4)$. Tìm phương trình đồ thị (C').

Bài 24: Tìm trên đồ thị (C): $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$ những điểm M có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất.

Bài 25: Tìm trên đồ thị (C): $y=\frac{x^2-3x+6}{x-2}$ tất cả các cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

• *Ý nghĩa hình học của đạo hàm:* Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là:

$$y-y_0=f'(x_0).(x-x_0)\quad (y_0=f(x_0))$$

• Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y=f(x)$ và $(C_2): y=g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 là hệ phương trình $\begin{cases}f(x_0)=g(x_0)\\f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}$ có nghiệm x_0

Nghiệm của hệ là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

• Nếu $(C_1): y=px+q$ và $(C_2): y=ax^2+bx+c$ thì

(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau ⇔ phương trình $ax^2+bx+c=px+q$ có nghiệm kép.

Các dạng tiếp tuyến của đồ thị hàm số thường gặp

- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm $M(x_0;y_0)$, hoặc hoành độ x_0, hoặc tung độ y_0.
- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ cho trước.
- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc của nó.

Phương pháp:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và $M(x_0;y_0)$ là điểm trên (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(x_0;y_0)$ có:

- Hệ số góc: $k=f'(x_0)$
- Phương trình: $y-y_0=k(x-x_0)$, hay $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Vậy, để viết được phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ chúng ta cần đủ ba yếu tố sau:

- Hoành độ tiếp điểm: x_0
- Tung độ tiếp điểm: y_0 (Nếu đề chưa cho, ta phải tính bằng cách thay x_0 vào hàm số $y_0=f(x_0)$)
- Hệ số góc $k=f'(x_0)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $(x_0;y_0)$

Phương pháp

1. Hai đồ thị tiếp xúc

1.1. Định nghĩa: Hai đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gọi là tiếp xúc nhau tại điểm M nếu tại M chúng có cùng tiếp tuyến.

2.1. Định lí 1: Hai đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ có nghiệm và nghiệm của hệ là tọa độ tiếp điểm.

2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1.2. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$. Một cát tuyến MM_0 được giới hạn bởi đường thẳng M_0T khi M dần tới M_0 thì M_0T gọi là tiếp tuyến của đồ thị. M_0 gọi là tiếp điểm.

Định lí 2: Đạo hàm của $f(x)$ tại $x=x_0$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0;f(x_0))$.

Nhận xét: Hệ số góc của mọi tiếp tuyến đều có dạng $f'(x_0)$.

2.2. Các bài toán về phương trình tiếp tuyến:

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

Phương pháp:

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \text{ với } y_0=f(x_0).$$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$, biết tiếp tuyến có hệ số góc k.

Phương pháp:

Cách 1:

*Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y=kx+b$

* Điều kiện tiếp xúc là hệ phương trình: $\begin{cases} f(x)=kx+b & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Từ (2) ta tìm được x, thế vào (1) ta có được b. Ta có tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2:

* Giải phương trình $f'(x)=k$ giải phương trình này ta tìm được các nghiệm $x_1,x_2,...,x_n$.

* Phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_i)(x-x_i)+f(x_i)$ $(i=1,2,...,n)$.

Chú ý: Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn để sau:

* Số tiếp tuyến của đồ thị chính vớ hệ số góc k là số nghiệm của phương trình $f'(x)=k$.

* Cho hai đường thẳng $d_1: y=k_1x+b_1$ và $d_2: y=k_2x+b_2$. Khi đó

i) $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1.k_2}\right|$, trong đó $\alpha=\widehat{(d_1,d_2)}$.

ii) $d_1//d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1\neq b_2 \end{cases}$

iii) $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2=-1$.

Bài toán 01: Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm

Phương pháp

Bài toán 1:

Hai đường cong $(C): y=f(x)$ và $(C'): y=g(x)$ tiếp xúc nhau tại $M(x_0;y_0)$. Khi điểm $M\in(C)\cap(C')$ và tiếp tuyến tại M của (C) trùng với tiếp tuyến tại M của (C') chỉ khi hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Lưu ý: Mệnh đề sau đây không đúng cho mọi trường hợp:

$\begin{cases} (C): y=f(x) \\ (d): y=ax+b \end{cases}$ tiếp xúc nhau $\Rightarrow f(x)-ax-b=0$ có nghiệm kép.

Hàm $f(x)$ nhận x_0 làm nghiệm bội k nếu $f(x_0)=f'(x_0)=...=f^{(k-1)}(x_0)=0$ và $f^k(x_0)\neq 0$. Nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2 chứ **không phải nghiệm kép.**

Phép biến đổi tương đương của phương trình nói chung không bảo toàn số bội của nghiệm.

Ví dụ 1. Đường cong $y=\sqrt{x}$ không tiếp xúc với trục hoành tại 0, tức là phương trình $\sqrt{x}=0$ không nhận 0 làm nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2. Khi đó đồ thị $(C): y=x^3$ của hàm số tiếp xúc với trục hoành tại $x=0$ nhưng phương trình $x^3=0$ nhận 0 làm nghiệm bội 3.

Ví dụ 2. Đồ thị $(C): y=\sin x$ của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $(d): y=x$ tại $x=0$ nhưng phương trình $\sin x-x=0$ thì không thể có nghiệm kép.

Như vậy, biến đổi tương đương của phương trình chỉ bảo toàn tập nghiệm, chứ không chắc bảo toàn số bội các nghiệm. Đây cũng là sai lầm dễ mắc phải khi giải quyết bài toán tiếp tuyến.

Bài toán 2:

* Đường cong $(C): y=f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ khả vi tại x_0. Trong trường hợp (C) có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì tiếp tuyến đó có hệ số góc $f'(x_0)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

* Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1. Tại điểm $M(-1;3)$;
2. Tại điểm có hoành độ bằng 2;
3. Tại điểm có tung độ bằng 1;.
4. Tại giao điểm (C) với trục tung;
5. Có hệ số góc là 9;
6. Song song với đường thẳng (d): $27x - 3y + 5 = 0$;
7. Vuông góc với đường thẳng (d'): $x + 9y + 2013 = 0$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$

1. Phương trình tiếp tuyến (t) tại $M(-1;3)$ có phương trình: $y = y'(-1)(x+1) + 3$

Ta có: $y'(-1) = -3$, khi đó phương trình (t) là: $y = -3x$

Chú ý:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

2. Thay $x = 2$ vào đồ thị của (C) ta được $y = 21$.

Tương tự câu **1**, phương trình (t) là: $y = 24x - 27$

Chú ý:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x = x_0$, $y_0 = f(x_0)$, $y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

3. Thay $y = 1$ vào đồ thị của (C) ta được $x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -3$.

Tương tự câu **1**, phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$, $y = 9x + 28$

Chú ý: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Giải phương trình $f(x) = y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0.

Tính $y'(x_0)$ $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

4. Trục tung Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Tương tự câu **1**, phương trình (t) là: $y = 1$

5. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Ta có: $y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0$, theo giả thiết $y'(x_0) = 9$, tức là $3x_0^2 + 6x_0 = 9 \Rightarrow x_0 = -3$ hoặc $x_0 = 1$. Tương tự câu **1**

6. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Theo bài toán: $(t) \parallel (d)$: $y = 9x + \frac{5}{3} \Rightarrow y'(x_0) = 9$. Tương tự câu **1**

7. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Theo bài toán: $(t) \perp (d')$: $y = -\frac{1}{9}x - \frac{2013}{9} \Rightarrow y'(x_0) = 9$. Tương tự câu **1**

Ví dụ 2.

1. Cho hàm số: $y = x^3 - (m-1)x^2 + (3m+1)x + m - 2$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2;-1)$.

2. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+3)x - 3$ và (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\frac{7}{\sqrt{17}}$.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m-1)x + 3m + 1$ với $x = 1 \Rightarrow y(1) = 3m + 1 \Rightarrow y'(1) = m + 6$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có $x = 1$: $y = (m+6)(x-1) + 3m + 1$

Tiếp tuyến này đi qua $A(2;-1)$ nên có: $-1 = m + 6 + 3m + 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy, $m = -2$ là giá trị cần tìm.

2. Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m + 3$.

Phương trình tiếp tuyến (d): $y = y'(2)(x-2) + y(2)$

$y = (11 - 7m)(x - 2) + 7 - 6m = (11 - 7m)x + 8m - 15 \Leftrightarrow (11 - 7m)x - y + 8m - 15 = 0$

$$d(0,(d)) = \frac{|8m - 15|}{\sqrt{(11-7m)^2 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 17(8m-15)^2 = 49[(11-7m)^2 + 1]$$

$\Leftrightarrow 1313m^2 - 3466m + 2153 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, $m = \frac{2153}{1313}$.

Ví dụ 3:

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Gọi (t) là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số và (t) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$, nên đường thẳng (t) có hệ số góc bằng -6.

Cách 1: Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (t) và đồ thị (C) của hàm số. Khi đó, ta có phương trình: $y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -6$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(2x_0^2 + 2x_0 + 3) = 0$ $(*)$. Vì $2x_0^2 + 2x_0 + 3 > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

nên phương trình $(*) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 4 \Rightarrow M(1;4)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -6(x-1) + 4 = -6x + 10$.

Cách 2: Phương trình (t) có dạng $y = -6x + m$

(t) tiếp xúc (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0

$$\begin{cases} -x_0^4 - x_0^2 + 6 = -6x_0 + m \\ -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = 10 \end{cases}$$

2. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 1$

Gọi $M(x_0;y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}$,

Tiếp tuyến Δ tại điểm M có hệ số góc: $y'(x_0) = x_0^2 - 1$

Đường thẳng d: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $k_2 = -\frac{1}{3}$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{3} \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 điểm $M(-2;0)$, $\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 4

1. Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+2}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A(-1;-2)$ và $B(1;0)$.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A(2;7)$ và $B(-2;7)$.

Lời giải

1. *Cách 1.* Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) và (C)).

$$= -\frac{5}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \frac{3 - x_0}{x_0 + 2} = -\frac{5}{(x_0+2)^2}x + \frac{(-x_0^2 + 6x_0 + 6)}{(x_0+2)^2}$$

$\Leftrightarrow 5x + (x_0+2)^2 y + x_0^2 - 6x_0 - 6 = 0$

$$d(A,(d)) = d(B,(d)) \Leftrightarrow \frac{\left|-5 - 2(x_0+2)^2 + x_0^2 - 6x_0 - 6\right|}{\sqrt{25 + (x_0+2)^4}} = \frac{\left|5 + x_0^2 - 6x_0 - 6\right|}{\sqrt{25 + (x_0+2)^4}}$$

$$\Leftrightarrow \left|x_0^2 + 14x_0 + 19\right| = \left|x_0^2 - 6x_0 - 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2 + 14x_0 + 19 = x_0^2 - 6x_0 - 1 \\ x_0^2 + 14x_0 + 19 = -x_0^2 + 6x_0 + 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0^2 + 4x_0 + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Vậy phương trình (d): $y = -5x - 1$

Cách 2. Tiếp tuyến (d) cách đều hai điểm A, B suy ra hoặc (d) song song với đường thẳng AB hoặc (d) đi qua trung điểm $I(0;-1)$ của đoạn AB.

*Trường hợp 1: (d) //AB.

Hệ số góc của đường thẳng AB: $k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 1$.

(d) // AB suy ra hệ số góc của (d): $f'(x_0) = 1 \Rightarrow -\frac{5}{(x_0+2)^2} = 1$ (*).

Phương trình (*) vô nghiệm do đó trường hợp này không xảy ra.

*Trường hợp 2: (d) qua trung điểm I của đoạn AB.

Phương trình (d) có dạng $y = kx - 1$.

$$\text{(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - x_0}{x_0 + 2} = kx_0 - 1 \quad (2) \\ -\frac{5}{(x_0+2)^2} = k \quad (3) \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0.$$

Thay $k = -\frac{5}{(x_0+2)^2}$ vào (2) ta được $\frac{3 - x_0}{x_0 + 2} = -\frac{5x_0}{(x_0+2)^2} - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -2 \\ (3 - x_0)(x_0 + 2) = -x_0 - (x_0 + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -2 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -1$$

Thay $x_0 = -1$ vào (2) ta được $k = -5$.

Vậy phương trình (d): $y = -5x - 1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Phương trình tiếp tuyến (D) có dạng:

$y=(3x_0^2-12x_0+9)(x-x_0)+x_0^3-6x_0^2+9x_0-1=(3x_0^2-12x_0+9)x-2x_0^3+6x_0^2-1$

$\Leftrightarrow (3x_0^2-12x_0+9)x-y-2x_0^3+6x_0^2-1=0$ (*)

$d(A,(D))=d(B,(D))$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|2(3x_0^2-12x_0+9)-7-2x_0^3+6x_0^2-1\right|}{\sqrt{(3x_0^2-12x_0+9)^2+1}}=\dfrac{\left|-2(3x_0^2-12x_0+9)-7-2x_0^3+6x_0^2-1\right|}{\sqrt{(3x_0^2-12x_0+9)^2+1}}$

$\Leftrightarrow \left|-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10\right|=\left|-2x_0^3+24x_0-26\right|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10=-2x_0^3+24x_0-26 \quad (1)\\ -2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10=2x_0^3-24x_0+26 \quad (2)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12x_0^2-48x_0+36=0\\ 4x_0^3-12x_0^2+16=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=3 \vee x_0=1\\ x_0=-1 \vee x_0=2\end{array}\right.$

Lần lượt thay $x_0=3 \vee x_0=1 \vee x_0=-1 \vee x_0=2$ vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến (D) là $y+1=0$, $y-3=0$, $y=24x+7$, $y=-3x+7$.

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C):

1. $y=x^3-3x^2+2$, biết d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa mãn: $OB=9OA$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm M, biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Lời giải

1. Gọi $M(x_0;y(x_0))$ là toạ độ tiếp điểm.

Theo bài toán, đường thẳng d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt A,B. Gọi β là góc tạo bởi giữa d và Ox, do đó d có hệ số góc $k=\pm\tan\beta$

Dễ thấy, tam giác AOB vuông tại O, suy ra $\tan\beta=\dfrac{OB}{OA}=9$

Nói khác, đường thẳng d có hệ số góc là ± 9, nghĩa là ta luôn có:

$\left[\begin{array}{l}y'(x_0)=9\\ y'(x_0)=-9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x_0^2-6x_0-9=0\\ 3x_0^2-6x_0+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=-1$

hoặc $x_0=3$ vì $x_0^2-2x_0+3>0, \forall x_0\in\mathbb{R}$.

Với $x_0=-1$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x+7$

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x-25$

Vậy, có 2 tiếp tuyến $y=9x+7$, $y=9x-25$ thỏa mãn đề bài.

2. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A(1;2)$, $B(3;-2)$ và đường thẳng đi qua 2 cực trị là $AB: 2x+y-4=0$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (d) cần tìm.

Khi đó $y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2$

Ta có: $AB=2\sqrt{5}$, $d(M;AB)=\dfrac{\left|2x_0+y_0-4\right|}{\sqrt{5}}$

Giả thiết $S_{MAB}=6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.AB.d(M;AB)=6 \Leftrightarrow \left|2x_0+y_0-4\right|=6$

$\Leftrightarrow 2x_0+y_0=10$ hoặc $2x_0+y_0=-2$

TH1: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}2x_0+y_0=-2\\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y_0=-2-2x_0\\ x_0\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_0=-2\\ x_0=0\end{cases}$ hay $M(0;-2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-2$.

TH2: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}2x_0+y_0=10\\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y_0=10-2x_0\\ (x_0-4)\left(x_0^2-2x_0+3\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_0=2\\ x_0=4\end{cases}$ hay $M(4;2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-34$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=9x-2$ và $y=9x-34$

Ví dụ 6: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$.

1. Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách đến trục hoành bằng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M
2. Gọi (d) là một tiếp tuyến của (C), (d) cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại A, cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại B và gọi I là tâm đối xứng của (C).

Viết phương trình tiếp tuyến (d) biết: $IA=4IB$.

Lời giải

1. Khoảng cách từ M đến trục Ox bằng 5 $\Leftrightarrow y_M=\pm 5$.

TH1: $\begin{cases}M\in(C)\\ y_M=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_M=-5\\ -5=\dfrac{x_M-1}{x_M+3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=-\dfrac{7}{3}\\ y_M=-5\end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

TH2: $\begin{cases} M \in (C) \\ y_M = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 5 \\ 5 = \dfrac{x_M - 1}{x_M + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 5 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_1\left(-\frac{7}{3};-5\right)$ là $y = 9x + 16$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_2(-4;5)$ là $y = 4x + 21$.

2. Ta có $\widehat{ABI}$ bằng góc hình học hợp bởi tiếp tuyến (d) với trục hoành suy ra hệ số góc của (d) là $k = \pm \tan\widehat{ABI} = \pm\frac{IA}{IB} = \pm 4$

Phương trình tiếp tuyến (d): $y = 4x + 5$ hoặc $y = 4x + 21$.

Ví dụ 7:

1. Biết rằng trên đồ thị $y = x^3 - (m+1)x^2 + (4m+2)x + 1$, (C_m) tồn tại đúng 1 điểm mà từ đó kẻ được tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 10y + 2013 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó

2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng (d): $3x + 4y - 2 = 0$ bằng 2.

Lời giải

1. Gọi tiếp điểm là $M(a;b)$, tiếp tuyến tại M có hệ số góc là

$$k = y'(a) = 3a^2 - 2(m+1)a + 4m + 2, \text{ theo giả thiết suy ra } k = 10$$

Trên đồ thị chỉ có 1 điểm nên phương trình $3a^2 - 2(m+1)a + 4m - 8 = 0$ có nghiệm kép hay $\Delta' = 0$ tức $m = 5$, thay vào ta được $a = 2 \Rightarrow M(2;29)$.

Vậy, tiếp tuyến cần tìm là $y = 10x + 9$

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C), khi đó: $y_0 = y(x_0) = \dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$

Ta có: $d[M,(d)] = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x_0 + 4y_0 - 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2 \Leftrightarrow 3x_0 + 4y_0 - 12 = 0$ hoặc $3x_0 + 4y_0 + 8 = 0$

TH1: $3x_0 + 4y_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 + 4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \frac{1}{3}$

TH2: $3x_0 + 4y_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 + 4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 19x_0 + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = -5$ hoặc $x_0 = -\frac{4}{3}$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M thuộc đồ thị (C) có dạng:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ trong đó và $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0+1)^2}$, $x_0 \neq -1$.

Phương trình tiếp tuyến (d_1) tại $M_1(0;3)$ là $y = -x + 3$.

Phương trình tiếp tuyến (d_2) tại $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{11}{4}\right)$ là $y = -\frac{9}{16}x + \frac{47}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_3) tại $M_3\left(-5;\frac{7}{4}\right)$ là $y = -\frac{1}{16}x + \frac{23}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_4) tại $M_4\left(-\frac{4}{3};-1\right)$ là $y = -9x - 13$.

Vậy, có 4 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài:

$$y = -x + 3,\ y = -\frac{9}{16}x + \frac{47}{16},\ y = -\frac{1}{16}x + \frac{23}{16},\ y = -9x - 13.$$

Ví dụ 8:

1. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ (C) và đường thẳng (d_m): $y = 2x + m$. Tìm m để đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tâm đối xứng I của (C) cách đều hai tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị hai điểm A, B sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau và khoảng cách từ O đến đường thẳng đi qua hai điểm A, B bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+3}{x-2} = 2x + m \Leftrightarrow g(m) = 2x^2 + (m-5)x - 2m - 3 = 0\ (\forall x \neq 2)$$

Để (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khác 2 nên phải có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-5)^2 + 4.2.(2m+3) > 0 \\ 2.2^2 + 2(m-5) - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 + 40 > 0\ \forall m \in \mathbb{R} \\ -15 \neq 0 \end{cases}$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Các tiếp tuyến:

$(\Delta_1): y = -\frac{5}{(x_1-2)^2}(x-x_1)+1+\frac{5}{x_1-2}$, $(\Delta_1): y = -\frac{5}{(x_2-2)^2}(x-x_2)+1+\frac{5}{x_2-2}$

$$d(I;\Delta_1)=d(I;\Delta_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 27.\frac{10}{(x_1-2)^2} = -2-\frac{10}{(x_2-2)^2} \Rightarrow m=-3. \\ (x_1-2)^2=(x_2-2)^2 \end{array}\right.$$

Vậy, $m=-3$ là giá trị cần tìm.

2. Gọi $A\left(x_1;y_1=x_1^3-3x_1^2+1\right)$, $B\left(x_2;y_2=x_2^3-3x_2^2+1\right)$ là 2 điểm cần tìm với $x_1 \neq x_2$

Ta có $y' = 3x^2-6x$

Hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt là

$$k_1 = 3x_1^2-6x_1, k_2 = 3x_2^2-6x_2$$

Tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên

$$k_1=k_2 \Leftrightarrow 3x_1^2-6x_1 = 3x_2^2-6x_2$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2)-6(x_1-x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1+x_2-2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2-x_1$$

Hệ số góc của đường thẳng AB là $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2^3-x_1^3-3(x_1^2-x_2^2)}{x_2-x_1}$

$$k=(x_1+x_2)^2-x_1x_2-3(x_1+x_2)=4-x_1(2-x_1)-6=x_1^2-2x_1-2$$

Phương trình đường thẳng AB là $y=(x_1^2-2x_1-2)(x-x_1)+x_1^3-3x_1^2+1$

$$\Leftrightarrow (x_1^2-2x_1-2)x-y-x_1^2+2x_1+1 = 0$$

$$\Rightarrow d(O,AB) = \frac{\left|-x_1^2+2x_1+1\right|}{\sqrt{(x_1^2-2x_1-2)^2+1}} = \frac{\left|-x_1^2+2x_1+1\right|}{\sqrt{(-x_1^2+2x_1+1+1)^2+1}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left|-x_1^2+2x_1+1\right| = \sqrt{2}\sqrt{(-x_1^2+2x_1+1+1)^2+1}$. Bình phương 2 vế và rút gọn được: $3\left(-x_1^2+2x_1+1\right)^2-4\left(-x_1^2+2x_1+1\right)-4 = 0$

$\Leftrightarrow -x_1^2+2x_1+1 = 2$ (1) hoặc $-x_1^2+2x_1+1 = -\frac{2}{3}$ (2)

Giải (1) ta được $x_1=1 \Rightarrow x_2=1$

Giải (2) ta được $x_1=\frac{3-2\sqrt{6}}{3}$ hoặc $x_1=\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$

Vậy, các điểm cần tìm là $A\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{3};-\frac{9+2\sqrt{6}}{9}\right)$, $B\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{3};\frac{-9+2\sqrt{6}}{9}\right)$ hoặc ngược lại.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Tìm trên (C): $y=2x^3-3x^2+1$ những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+11x-1$ tại điểm có tung độ bằng 5.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C): $y=\frac{2x+1}{x+1}$ biết d cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$.

5. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị

$$(C_m): y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m.$$

6. Cho hàm số $y=\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$ có đồ thị là (C_m), $m \in \mathbb{R}$ và $m \neq 0$. Với giá trị nào của m thì tại giao điểm đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị sẽ song song với đường thẳng $x-y-10=0$. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

7. Chứng minh rằng nếu các tiếp tuyến $(d),(t)$ của đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x$ song song với nhau thì hai tiếp điểm A,B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

8. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của (C_m):

$y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ vuông góc với đường thẳng $y=-x$.

9. Tìm m để đồ thị: $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(3m-4)x+1$ có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x-y+2013=0$.

10. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị là (C). Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$, đồng thời (d) cắt đồ thị (C) tại N, tìm tọa độ N.

Bài 2:

1. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+8x+5$ có đồ thị là (C). Chứng minh không có bất kỳ hai tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số lại vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y=\frac{2x^2}{x-1}$. Tìm $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm $M(1+\sin\alpha;9)$ nằm trên đồ thị (C). Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B đối xứng nhau qua điểm M.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Cho hàm số $y=x^4+2x^2-3$. Tìm phương trình tiếp tuyến của hàm số có khoảng cách đến điểm $M(0;-3)$ bằng $\frac{5}{\sqrt{65}}$.

4. Tìm m để đồ thị $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d:\ x+y+7=0$ góc α sao cho $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

5. Xác định m để hai tiếp tuyến của đồ thị $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ tại $A(1;0)$ và $B(-1;0)$ hợp với nhau một góc μ sao cho $\cos\mu=\frac{15}{17}$.

6. Cho hàm số: $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C)

a. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1.

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+1$.

c. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân.

d. Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

7. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y=\frac{2x}{x-1}$, biết:

a. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2.

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x+2y=0$.

c. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 9x-2y+1=0$.

d. Tạo với đường thẳng $(d'): 4x+3y+2012=0$ góc 45^0.

Bài 3: Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2$ có đồ thị (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng: $y=2x-2$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết khoảng cách từ điểm A(0;3) đến (d) bằng $\frac{9}{4\sqrt{5}}$.

Bài 4:

1. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{x-2}$, có đồ thị là (C). Tìm a, b biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục Ox có phương trình là $y=-\frac{1}{2}x+2$.

2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$, có đồ thị là (C). Tìm a, b, c biết (C) có ba điểm cực trị, điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là $(0;3)$ và tiếp tuyến d của (C) tại giao điểm của (C) với trục Ox có phương trình là $y=-8\sqrt{3}x+24$.

Bài 5: Cho hàm số $y=2x^4-4x^2-1$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x-48y+1=0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1;-3)$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 6: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân (O là gốc tọa độ).

Bài 7: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m).

1. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$ song song với đường thẳng $y=3x+10$.

2. Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=2x+1$.

3. Tìm m để từ điểm M(1;2) vẽ đến (C_m) đúng hai tiếp tuyến.

Bài 8: Tìm m để đồ thị: $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

Bài 9: Tìm điểm M trên đồ thị (C): $y=\frac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta:\ x+3y-3=0$ đạt giá trị nhỏ nhất. Trong trường hợp này, chứng minh Δ song song với tiếp tuyến của (C) tại M.

Bài toán 02: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH

Phương pháp

Nếu đường thẳng d cắt các trục *Ox, Oy* lần lượt tại *A, B* thì $\tan\widehat{OAB}=\pm\frac{OB}{OA}$, trong đó hệ số góc của d được xác định bởi $y'(x)=\tan\widehat{OAB}$

Ví dụ: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C)

1. Giải bất phương trình $y'<-4$;

2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt các trục *Ox, Oy* lần lượt tại *A, B* mà $OA=4OB$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Bất phương trình $y'<-4\Leftrightarrow\dfrac{-1}{(x-1)^2}<-4\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2<\dfrac{1}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-1|<\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$

2. Cách 1:

Ta có $\tan\widehat{OAB}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k=\dfrac{1}{4}$ hoặc $k=-\dfrac{1}{4}$.

Nhưng do $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\dfrac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm nghiệm phương trình $\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.$.

Từ đó ta xác định được hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4};y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

Cách 2:

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}\right)$ $(x_0\neq 1)$ là:

$y=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$ hay $y=\dfrac{-x}{(x_0-1)^2}+\dfrac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}$

Ta xác định được tọa độ giao điểm của tiếp tuyến với các trục tọa độ:

$A(2x_0^2-2x_0+1;0),B\left(0;\dfrac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right)$

Từ giả thiết $OA=4OB$, ta có:

$$\left|2x_0^2-2x_0+1\right|=4\left|\frac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right|\Leftrightarrow(x_0-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\ x_0=-1\end{array}\right.$$

Cách 3: Giả sử $A(a;0),B(0;b)$ với $ab\neq 0$.

Với giả thiết $OA=4OB\Rightarrow|a|=4|b|\Leftrightarrow a=\pm 4b\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{1}{4}$

Đường thẳng đi qua hai điểm *A, B* có dạng $\Delta:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ hay $\Delta:y=-\dfrac{b}{a}x+b$

Đường $\Delta:y=-\dfrac{b}{a}x+b$ tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ sau có

nghiệm x_0: $\begin{cases}\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{b}{a} & (*)\\ \dfrac{2x_0-1}{x_0-1}=-\dfrac{b}{a}x_0+b & (**)\end{cases}$ (I).

Từ (*) suy ra $-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$.

Hệ (I) trở thành $\begin{cases}\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{2x_0-1}{x_0-1}=-\dfrac{1}{4}x+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_0=3\\ x_0=-1\end{array}\right.\\ b=\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}+\dfrac{1}{4}x_0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{13}{4}\\ b=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$

Do vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4};y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A,B thoả mãn $OA=4OB$.

Bài toán 03: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B MÀ TIẾP TUYẾN TẠI A, B THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Các ví dụ

Ví dụ 1

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$, m là tham số khác 0 và khác $-\dfrac{1}{3}$

1. Chứng minh rằng nếu (C) cắt Ox tại điểm M có hoành độ x_0 thì hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là: $k=\dfrac{2x_0-2m}{x_0+m}$

2. Tìm m để (C) cắt Ox tại hai điểm và hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

Lời giải

1. Ta có $y=x-3m+\dfrac{3m^2+m}{x+m}$. Khi $m\neq 0$ và $m\neq-\dfrac{1}{3}$ thì đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu do đó đồ thị hàm số không suy biến thành đường thẳng.

Hệ số góc của tiếp tuyến (d) của (C) tại M là

$$k=y'(x_0)=\frac{(2x_0-2m)(x_0+m)-(x_0^2-2mx_0+m)}{(x_0+m)^2}.$$

Vì M thuộc Ox nên

$$y(x_0)=\frac{x_0^2-2mx_0+m}{x_0+m}=0\Rightarrow x_0^2-2mx_0+m=0.$$

$$\Rightarrow k=\frac{(2x_0-2m)(x_0+m)}{(x_0+m)^2}=\frac{2x_0-2m}{x_0+m}\ \text{(đpcm)}.$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox

$$\frac{x^2-2mx+m}{x+m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ g(x)=x^2-2mx+m=0 \ (1) \end{cases}$$

(C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt M,N $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khác $-m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m>0 \\ g(-m)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ 3m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ m\neq -\frac{1}{3} \text{ và } m\neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến của (C) tại M, N là $k_1=\frac{2x_1-2m}{x_1+m}$, $k_2=\frac{2x_2-2m}{x_2+m}$

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x_1-2m}{x_1+m}\right)\left(\frac{2x_2-2m}{x_2+m}\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 4[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2]=-x_1x_2-m(x_1+x_2)-m^2 \ (2)$$

Lại có $x_1+x_2=2m$, $x_1.x_2=m$.

Do đó: (2) $\Leftrightarrow -m^2+5m=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=5$.

So với điều kiện (*) nhận $m=5$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Gọi điểm $M\left(m;2+\frac{1}{m-2}\right)\in(C)$.

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(m)=-\frac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$. Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy, điểm M cần tìm có tọa độ là: (1; –1); (3; 3)

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm $I(1;1)$.

Lời giải

Với $x_0\neq 1$, tiếp tuyến (d) với (C) tại $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)$ có phương trình:

$$y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2}x+y-\frac{x_0^2}{(x_0-1)^2}=0$$

(d) có vec tơ chỉ phương $\vec{u}=\left(-1;\frac{1}{(x_0-1)^2}\right)$, $\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\frac{1}{x_0-1}\right)$

Để (d) vuông góc IM điều kiện là:

$$\vec{u}.\overrightarrow{IM}=0 \Leftrightarrow -1.(x_0-1)+\frac{1}{(x_0-1)^2}\cdot\frac{1}{x_0-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=2 \end{array}\right.$$

Với $x_0=0$, ta được $M(0;0)$

Với $x_0=2$, ta được $M(2;2)$

Vậy, $M(0;0)$ và $M(2;2)$ là tọa độ 2 điểm cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A,B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận.

2. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$. Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C), các điểm M, N sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại 4 điểm lập thành một hình thang.

Bài 2:

1. Chứng minh rằng với một điểm M tùy ý thuộc $(C): y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến tại M cắt (C) tại hai điểm A,B tạo với I (là giao hai tiệm cận) một tam giác có diện tích không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của M.

2. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$, có đồ thị là (C). Tìm trên đường thẳng $d: y=2x+1$ các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 3: Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị là (C).

1. Chứng minh rằng (C) tiếp xúc với trục hoành.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.
3. Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Bài 4. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 24x-y+1=0$.
2. Tìm $M\in Oy$ sao cho từ M vẽ đến (C) đúng ba tiếp tuyến.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài toán 04: TIẾP TUYẾN CÓ HỆ SỐ GÓC NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5$ có đồ thị là (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2+6x-9$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C) \Leftrightarrow y_0=x_0^3+3x_0^2-9x_0+5$.

Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc: $k=y'(x_0)=3x_0^2+6x_0-9=3(x_0+1)^2-12\ge -12$

$\min k=-12$, đạt được khi: $x_0=-1\Rightarrow y_0=16$.

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại $M(-1;16)$. có hệ số góc nhỏ nhất và có phương trình là: $y=-12x+4$

Ví dụ 2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=-2x^3+6x^2-5$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A thuộc (C) có hoành độ $x=3$. Tìm giao điểm khác A của (d) và (C).
2. Xác định tham số a để tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là a.
3. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình $y''=0$ của (C).

Lời giải

1. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A:
$y=y'(3)(x-3)+y(3)=-18x+49$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$-2x^3+6x^2-5=-18x+49 \Leftrightarrow 2x^3-6x^2-18x+54=0 \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-3$

Suy ra giao điểm của (d) và (C) khác A là $B(-3;103)$.

2. Tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là a $\Leftrightarrow \exists x_0\in\mathbb{R},\ y'(x_0)=a$

$\Leftrightarrow \exists x_0: -6x_0^2+12x_0=a$.

Bài toán quy về: Tìm a để phương trình $-6x^2+12x=a$ (1) có nghiệm.

$(1)\Leftrightarrow 6x^2-12x+a=0$. (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=36-6a\ge 0 \Leftrightarrow a\le 6$.

Vậy $a\le 6$.

3. Từ giả thiết, suy ra hoành độ phương trình $y''=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow I(1;-1)$.

Phương trình tiếp tuyến (D) của (C) đi qua $I(1;-1)$. có dạng: $y=k(x-1)-1$.

(D) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0^3+6x_0^2-5=k(x_0-1)-1 & (1)\\ -6x_0^2+12x_0=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được

$-2x_0^3+6x_0^2-5=(-6x_0^2+12x_0)(x_0-1)-1 \Leftrightarrow (x_0-1)^3=0 \Leftrightarrow x_0=1$

Suy ra phương trình $(d): y=6x-7$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y=-x+1$ một góc α thỏa $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;6)$.

Bài toán 05: TIẾP TUYẾN SONG SONG, VUÔNG GÓC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

Ví dụ

Ví dụ: Cho hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\frac{5}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm m để trên (C) có hai điểm phân biệt $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1.x_2>0$ và tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x-3y+1=0$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-2x^2+2(m-1)x+3m-2$.

Hệ số góc của $d: x-3y+1=0$ là $k_d=\frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ vuông góc với d thì phải có: $y'=-3$

Trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình:

$-2x^2+2(m-1)x+3m-2=-3 \Leftrightarrow 2x^2-2(m-1)x-3m-1=0$ (1)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Yêu cầu bài toán ⇔ phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + 2(3m+1) > 0 \\ \dfrac{-3m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ -1<m<-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, $m<-3$ hoặc: $-1<m<-\frac{1}{3}$ thỏa mãn bài toán.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập:

1. Cho hàm số $y=x^3+2x^2+x+1$. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với một tiếp tuyến khác của đồ thị.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C). Tìm toạ độ điểm M thuộc $d: y=-3x+2$ sao cho từ M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Bài toán 06: TIẾP TUYẾN ĐỒ THỊ VÀ MỐI LIÊN HỆ TÍNH CHẤT TAM GIÁC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm M, biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Lời giải

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A(1;2)$, $B(3;-2)$ và đường thẳng đi qua 2 cực trị là $AB: 2x+y-4=0$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (d) cần tìm. Khi đó $y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2$

Ta có: $AB=2\sqrt{5}$, $d(M;AB)=\dfrac{|2x_0+y_0-4|}{\sqrt{5}}$

Giả thiết $S_{MAB}=6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.AB.d(M;AB)=6 \Leftrightarrow |2x_0+y_0-4|=6$

$\Leftrightarrow 2x_0+y_0=10$ hoặc $2x_0+y_0=-2$

TH1: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0+y_0=-2 \\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-2-2x_0 \\ x_0\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-2 \\ x_0=0 \end{cases} \text{ hay } M(0;-2)$$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-2$.

TH2: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0+y_0=10 \\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=10-2x_0 \\ (x_0-4)\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=2 \\ x_0=4 \end{cases} \text{ hay } M(4;2)$$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-34$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=9x-2$ và $y=9x-34$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x+y=0$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình Δ:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)} \Rightarrow y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}$$

Gọi $A=\Delta\cap Ox \Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$, $B=\Delta\cap Oy \Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

ΔOAB có trọng tâm là: $G\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6};\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right)$.

Do G thuộc đường thẳng: $4x+y=0 \Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{(x_0+1)^2} \text{ (vì A, B} \neq \text{O nên } x_0^2-2x_0-1\neq0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1=\dfrac{1}{2} \\ x_0+1=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2} \\ x_0=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $x_0=-\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$. Với $x_0=-\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x^2+m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1,5.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. $x=1\Rightarrow y(1)=m-2$ suy ra $M(1;m-2)$. Tiếp tuyến tại M là $d:\ y=-3x+m+2$.

d cắt Ox tại A nên $A(x_A;0)$ và $A\in d$ suy ra $A\left(\frac{m+1}{3};0\right)$

d cắt Oy tại B nên $B(0;y_B)$ và $B\in d$ suy ra $B(0;m+1)$

Diện tích tam giác OAB có diện tích bằng 1,5 khi và chỉ khi $\frac{1}{2}.|OA|.|OB|=\frac{3}{2}$ hay $|OA|.|OB|=3\Leftrightarrow\left|\frac{m+1}{3}\right|.|m+1|=3$ hay $(m+1)^2=9$ phương trình này có 2 nghiệm $m=-4$ hoặc $m=2$.

Vậy, $m=-5$ hoặc $m=2$ là giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{2x+m}{x-2}$, m là tham số khác -4 và (d) là một tiếp tuyến của (C). Tìm m để (d) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 2.

2. Cho hàm số $y=x^3+1-m(x+1)$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

Bài 2:

1. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của *m* sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M\in(C)$ mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y=2m-1$.

2. Cho hàm số $y=\frac{2mx+3}{x-m}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tìm *m* để tiếp tuyến tại một điểm bất kì của (C) cắt hai tiệm cận tại A và B sao cho ΔIAB có diện tích $S=22$.

3. Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm hai tiệm cận.

Bài 3:

Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$, có đồ thị là (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$, O là gốc tọa độ.

Bài 4: Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+1$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.
4. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua tâm đối xứng.

Bài 5: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C).

1. Trên đồ thị (C) tồn tại bao nhiêu điểm mà tiếp tuyến của (C) tại đó song song với đường thẳng $y=4x+3$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{18}$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ tâm đối xứng đến tiếp tuyến lớn nhất.

Bài 6: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$ có đồ thị (C) cắt Oy ở A và có đúng hai điểm chung với trục Ox là M và N. Tiếp tuyến với đồ thị tại M đi qua A. Tìm a;b;c để $S_{AMN}=1$.

Bài 7: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ tâm đối xứng I đến tiếp tuyến là lớn nhất.
4. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với IM.

Bài 8: Viết phương trình tiếp tuyến (d) với đồ thị (C), để:

1. (d) tạo với 2 đường tiệm cận cùng với $I(1;1)$ tạo thành tam giác có chu vi bằng $2(2+\sqrt{2})$, biết $(C):\ y=\frac{x}{x-1}$
2. (d) cắt 2 tiệm cận tại A, B sao cho $IA^2+IB^2=40$ với $I(-1;2)$, biết $(C):\ y=\frac{2x-1}{x+1}$.
3. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C), giao điểm hai tiệm cận là I.

http://sachxua.edu.vn

Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) lần lượt tại E, F và chu vi $\Delta IEF = 5+\sqrt{17}$.

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. Cho hàm số: $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cùng với 2 đường tiệm cận của (C) tạo thành một tam giác có chu vi bằng $8+2\sqrt{10}$.

Bài 9:

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), để khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A,B sao cho AB ngắn nhất.

Bài toán 07: TIẾP TUYẾN ĐỒ THỊ VÀ MỐI LIÊN HỆ ĐƯỜNG TRÒN

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm $m\in\mathbb{R}$, để tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=\dfrac{1}{5}$ theo 1 dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải

$y'=3x^2-m\Rightarrow y'(1)=3-m$. Với $x=1\Rightarrow y(1)=0\Rightarrow M(1;0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M: $y=y'(1)(x-1)\Leftrightarrow(3-m)x-y-3+m=0\,(d)$.

Đường tròn có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\dfrac{1}{\sqrt5}$. Vì $IM>R$ nên độ dài cung nhỏ nhất khi (d) tiếp xúc với đường tròn, tức là $d(I;(d))=R$

$\Leftrightarrow\dfrac{|(3-m)2-3-3+m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt5}$ hay $\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2-6m+10}}=\dfrac{1}{\sqrt5}$, bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình $2m^2+3m-5=0$, giải phương trình này ta được $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{5}{2}$ thỏa bài toán.

Ví dụ 2: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x^2+m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có chu vi $2\pi\sqrt{\dfrac{5}{18}}$.

Lời giải

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=m-2\Rightarrow M(1;m-2)$

Tiếp tuyến tại M là d: $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+m-2\Rightarrow d: y=-3x+m+1$

d cắt trục Ox tại A: $0=-3x_A+m+1\Leftrightarrow x_A=\dfrac{m+1}{3}\Rightarrow\ A\left(\dfrac{m+1}{3};0\right)$

d cắt trục Oy tại B: $y_B=m+1\Rightarrow\ B(0;m+1)$

Tam giác vuông tại O, trung điểm I của AB là tâm đường tròn ngoại tiếp

$I\left(\dfrac{m+1}{6};\dfrac{m+1}{2}\right)$

Bán kính $OI=\sqrt{\dfrac{5}{18}}|m+1|$. Giả thiết có $2\pi OI=2\pi\sqrt{\dfrac{5}{18}}\Leftrightarrow|m+1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$

Ví dụ 3: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (t) của (C), biết:

1. (t) tiếp xúc với đường tròn: $(\gamma):(x-2)^2+(y-6)^2=45$.
2. Khoảng cách từ (t) đến điểm I(1;1) lớn nhất.

Lời giải

1. Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$ với I(1;1), hệ trục Oxy $\Rightarrow$ hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases}x=X+x_I=X+1\\y=Y+y_I=Y+1\end{cases}$

Đối với hệ trục IXY thì A có tọa độ là $\begin{cases}X=x-1=2-1=1\\Y=y-1=6-1=5\end{cases}$

Hàm số cho trở thành: $Y+1=\dfrac{X+1+1}{(X+1)-1}=\dfrac{X+2}{X}\Leftrightarrow Y=\dfrac{2}{X}=F(X)$.

Phương trình của đường tròn (γ) là $(X-1)^2+(Y-5)^2=45$, (γ) có tâm A(1;5), bán kính $R=3\sqrt5$.

Phương trình tiếp tuyến (D) của (C) tại điểm có hoành độ X_0 là

$Y=F'(X_0)(X-X_0)+F(X_0)=-\dfrac{2}{X_0^2}(X-X_0)+\dfrac{2}{X_0}=-\dfrac{2}{X_0^2}X+\dfrac{4}{X_0}\Leftrightarrow 2X+X_0^2Y-4X_0=0.$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(A,(D))=R$

$\Leftrightarrow d[A,(D)]=\dfrac{|2+5X_0^2-4x_0|}{\sqrt{4+X_0^4}}=3\sqrt5\Leftrightarrow[(d(A,(D))]^2=\dfrac{(5X_0^2-4X_0+2)^2}{4+X_0^4}=45$

$\Leftrightarrow 25X_0^4+16X_0^2+4-40X_0^3+20X_0^2-16X_0=180+45X_0^4$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow 5X_0^4+10X_0^3-9X_0^2+4X_0+44=0 \Leftrightarrow (X_0+2)^2(5X_0^2-10X_0+11)=0 \Leftrightarrow X_0=-2$

Vậy phương trình (D): $Y=-\frac{1}{2}X-2$, suy ra phương trình (D) đối với hệ trục xuất phát Oxy là: $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)-2=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

2. Đối với hệ tọa độ IXY, phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$2X+X_0^2Y-4X_0=0$, $d(I,(d))=\frac{|4X_0|}{\sqrt{4+X_0^4}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $4+X_0^4\ge 2\sqrt{4X_0^4}=4X_0^2$

$\Rightarrow d(I,(d))\le\frac{|4X_0|}{\sqrt{4X_0^2}}=\frac{|4X_0|}{|2X_0|}=2 \Rightarrow d(I,(d))=2 \Leftrightarrow X_0^4=4 \Leftrightarrow X_0=\pm\sqrt{2}$

Khi đó phương trình tiếp tuyến (d): $Y=-X+2\sqrt{2}, Y=-X-2\sqrt{2}$.

Suy ra phương trình (d) đối với hệ trục Oxy là $y=-x+2+2\sqrt{2}$ và $y=-x+2-2\sqrt{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập: Tìm *m* để tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm M có hoành độ $x=-1$ cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Dạng 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm cho trước

Phương pháp

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$.

Phương pháp

Cách 1: Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y=k(x-x_A)+y_A$

Điều kiện tiếp xúc: hệ phương trình $\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A & (1)\\ f'(x)=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1), ta được: $f(x)=f'(x)(x-x_A)+y_A$, giải phương trình này ta tìm được các nghiệm $x_1,x_2,...,x_n$. Thay vào (2) ta tìm được k từ đó suy ra phương trình tiếp tuyến.

Cách 2:

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó tiếp tuyến có dạng: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Vì tiếp tuyến đi qua A nên ta có: $y_A=f'(x_0)(x_A-x_0)+y_0$, giải phương trình này ta tìm được x_0 suy ra phương trình tiếp tuyến.

Chú ý:

* Nếu giải theo cách 1 thì số tiếp tuyến của đồ thị phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình: $f(x)=f'(x)(x-x_A)+y_A$

* Nếu giải theo cách 2 thì số tiếp tuyến phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình $y_A=f'(x_0)(x_A-x_0)+f(x_0)$ (với ẩn là x_0).

Bài toán 01: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ ĐI QUA ĐIỂM CHO TRƯỚC

Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ đi qua điểm $M(x_1;y_1)$

Cách 1:

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng: $y=k(x-x_1)+y_1$.
- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0;y_0)$ khi hệ: $\begin{cases} f(x_0)=k(x_0-x_1)+y_1\\ f'(x_0)=k\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Cách 2:

- Gọi $N(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M, nên (d) cũng có dạng $y=y'_0(x-x_0)+y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình: $y_1=y'_0(x_1-x_0)+y_0$ (*)
- Từ phương trình (*) ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0;y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d).

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị $(C): y=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{4}-x$, biết d song song đường thẳng $x+y-8=0$.

2. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+5$ có đồ thị là (C). Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Cách 1: Tiếp tuyến d song song với đường thẳng $x+y-8=0$ nên d có dạng $y=-x+b$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

d tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x_0^3}{3}+\frac{3x_0^2}{4}-x_0=-x_0+b \ (1) \\ x_0^2+\frac{3x_0}{2}-1=-1 \ (2) \end{cases}$$ có nghiệm x_0.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow 2x_0^2+3x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=-\frac{3}{2}$.

Với $x_0=0$ thay vào phương trình (1), ta được $b=0$ khi đó $d: y=-x$.

Với $x_0=-\frac{3}{2}$ thay vào phương trình (1), ta được $b=\frac{9}{16}$ khi đó $d: y=-x+\frac{9}{16}$.

Cách 2: Gọi $(x_0;y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d và (C), với

$y(x_0)=\frac{x_0^3}{3}+\frac{3x_0^2}{4}-x_0$, tiếp tuyến d có hệ số góc $y'(x_0)=x_0^2+\frac{3x_0}{2}-1$

$d \parallel x+y-8=0 \Rightarrow y'(x_0)=-1$ tức $x_0^2+\frac{3x_0}{2}-1=-1$ hay nghiệm $x_0=0$ hoặc $x_0=-\frac{3}{2}$

Phần còn lại dành cho bạn đọc.

2. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=6x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Leftrightarrow y_0=2x_0^3-3x_0^2+5$ và $y'(x_0)=6x_0^2-6x_0$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại M có dạng: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-(2x_0^3-3x_0^2+5)=(6x_0^2-6x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=(6x_0^2-6x_0)x-4x_0^3+3x_0^2+5$

$A\in\Delta\Leftrightarrow 4=(6x_0^2-6x_0).\frac{19}{12}-4x_0^3+3x_0^2+5\Leftrightarrow 8x_0^3-25x_0^2+19x_0-2=0\Leftrightarrow x_0=1$ hoặc

$x_0=2$ hoặc $x_0=\frac{1}{8}$

Với $x_0=1\Rightarrow\Delta: y=4$

Với $x_0=2\Rightarrow\Delta: y=12x-15$

Với $x_0=\frac{1}{8}\Rightarrow\Delta: y=-\frac{21}{32}x+\frac{645}{128}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Đường thẳng $x=0$ đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ không phải là tiếp tuyến của đồ thị (C)

d là đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ có hệ số góc k có phương trình $y=kx+\frac{3}{2}$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là x_0 thì x_0 là

nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{2}x_0^4-3x_0^2+\frac{3}{2}=kx_0+\frac{3}{2} & (1) \\ 2x_0^3-6x_0=k & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta được $x_0^2\left(x_0^2-2\right)=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\pm\sqrt{2}$

Khi $x_0=0$ thì $k=0$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{3}{2}$

Khi $x_0=-\sqrt{2}$ thì $k=2\sqrt{2}$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Khi $x_0=\sqrt{2}$ thì $k=-2\sqrt{2}$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Vậy, có ba tiếp tuyến là $y=\frac{3}{2}$, $y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$, $y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Ví dụ 3:

1. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $d: y=\frac{5x}{4}+\frac{61}{24}$ để từ đó kẻ đến đồ thị $y=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{3}$ có 3 tiếp tuyến tương ứng với 3 tiếp điểm có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn: $x_1<x_2<0<x_3$

2. Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại 2 tiếp tuyến với $(C): y=x^3+6x^2+9x+3$ phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của 2 tiếp tuyến đó với (C) cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho OB = 2012.OA.

Lời giải

1. $M\left(m;\frac{5m}{4}+\frac{61}{24}\right)\in d$, tiếp tuyến (t) tại điểm $N(x_0;y_0)$ đi qua M:

$$\frac{2}{3}x_0^3+\left(\frac{1}{2}-m\right)x_0^2-mx_0+\frac{3m}{4}-\frac{5}{24}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\frac{1}{2}>0 \\ \frac{2}{3}x_0^2+\left(\frac{5}{6}-m\right)x_0+\frac{5}{12}-\frac{3m}{2}=0 \ (*) \end{array}\right.$$

Theo bài toán, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt âm, tức là:

$$\begin{cases} m^2+\frac{7m}{3}-\frac{5}{12}>0 \\ \frac{5}{18}-m>0 \\ \frac{3}{2}m-\frac{5}{4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-\frac{5}{2};\ m>\frac{1}{6} \\ m<\frac{5}{18} \\ m<\frac{5}{6} \end{cases}$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vậy, những điểm M thỏa bài toán là: $x_M < -\frac{5}{2}$ hoặc $\frac{1}{6} < x_M < \frac{5}{18}$.

2. Hoành độ tiếp điểm x_0 của tiếp tuyến dạng $y = kx + m$ với (C) là nghiệm của phương trình $f'(x_0) = k \Leftrightarrow 3x_0^2 + 12x_0 + 9 - k = 0$ (1)

Để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C) phân biệt nhau thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó $\Delta' = 9 + 3k > 0$ hay $k > -3$ (2).

Khi đó tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$ của 2 tiếp tuyến với (C) là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} y_0 = x_0^3 + 6x_0^2 + 9x_0 + 3 \\ 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{3}(x_0+2)(3x_0^2 + 12x_0 + 9) - 2x_0 - 3 \\ 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{3}(x_0+2)k - 2x_0 - 3 = \frac{k-6}{3}x_0 + \frac{2k-9}{3} \\ 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = k \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm là $(d): y = \frac{k-6}{3}x + \frac{2k-9}{3}$.

Do (d) cắt trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho OB = 2012.OA nên có thể xảy ra

- Nếu $A \equiv O$ thì $B \equiv O$, trường hợp này chỉ thỏa nếu (d) cũng qua O. Khi đó $k = \frac{9}{2}$.
- Nếu $A \neq O$, khi đó trong tam giác AOB vuông tại O sao cho $\tan\widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = 2012 \Rightarrow \frac{k-6}{3} = \pm 2012 \Rightarrow k = 6042$

hoặc $k = -6030$ (không thỏa (2)).

Vậy $k = \frac{9}{2}$, $k = 6042$ thỏa mãn bài toán.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ có đồ thị là (C). Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{4}{9}; \frac{4}{3}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ (C). Tìm phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

Bài 3: Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1. $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 1$ đi qua điểm $A\left(0; \frac{1}{3}\right)$
2. $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ đi qua điểm cực tiểu của đồ thị.
3. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9}; -2\right)$.
4. $y = x^3 - 2x^2 + x + 4$ đi qua điểm $M(-4; -24)$.

Bài 4:

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(6; 4)$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$, biết d đi qua điểm $A(-6; 5)$.
3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm $I\left(\frac{29}{3}; 184\right)$.

Bài 5: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 7$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-2; 7)$.

Bài 6: Cho hàm số $y = (2 - x)^2 x^2$, có đồ thị (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với Parabol $y = x^2$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(2; 0)$.

Bài toán 02: TÌM ĐIỂM M ĐỂ QUA ĐÓ KẺ ĐƯỢC n TIẾP TUYẾN

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$, có đồ thị là (C). Tìm tọa độ các điểm trên đường thẳng $y = -4$ mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị (C) đúng hai tiếp tuyến.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Gọi A là điểm nằm trên đường thẳng $y = -4$ nên $A(a; -4)$.

Đường thẳng Δ qua A với hệ số góc k có phương trình $y = k(x - a) - 4$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\begin{cases}-x^3+3x-2=k(x-a)-4\\-3x^2+3=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x-2=3(x^2-1)(x-a)\\-3x^2+3=k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)\left[2x^2-(3a+2)x+3a+2\right]=0\ (1)\\-3x^2+3=k\ (2)\end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với: $\left[\begin{array}{l}x=-1\\g(x)=2x^2-(3a+2)x+3a+2=0\end{array}\right.$

Qua A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi (2) có 2 giá trị k khác nhau, khi đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2, đồng thời thỏa

$$k_1=-3x_1^2+3,\ k_2=-3x_2^2+3 \text{ có 2 giá trị k khác nhau}$$

Trường hợp 1:

$g(x)$ phải thỏa mãn có một nghiệm bằng -1 và nghiệm khác -1 hay

$$\begin{cases}g(-1)=0\\-\dfrac{3a+2}{2}\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+6=0\\a\neq 0\end{cases}\Rightarrow a=-1 \text{ kiểm tra (2) thấy thỏa mãn.}$$

Trường hợp 2:

$g(x)$ phải thỏa mãn có một nghiệm kép khác -1 hay

$$\begin{cases}(3a+2)^2-8(3a+2)=0\\\dfrac{3a+2}{2}\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3(3a+2)(a-2)=0\\3a+2\neq 2\end{cases}$$

$\Rightarrow a=-\dfrac{2}{3}$ hoặc $a=2$, kiểm tra (2) thấy thỏa mãn.

Vậy, các điểm cần tìm là $A(-1;-4)$, $A(2;-4)$ hoặc $A\left(-\dfrac{2}{3};-4\right)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=3x-x^3$ có đồ thị là (C). Tìm trên đường thẳng (d): $y=-x$ các điểm M mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Lời giải

Gọi $M(m;-m)\in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có dạng: $y=k(x-m)-m$.

Δ là tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau có nghiệm x_0:

$$\begin{cases}3x_0-x_0^3=k(x_0-m)-m\ (1)\\3-3x_0^2=k\ (2)\end{cases}\quad (*)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $2x_0^3-3mx_0^2+4m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2x_0^3}{3x_0^2-4}$ (**)

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$(*) có nghiệm x_0 đồng thời (2) tồn tại đúng 2 giá trị k khác nhau

Khi đó (**) có 2 nghiệm x_0 phân biệt thỏa mãn (2) có 2 giá trị k khác nhau.

Xét hàm số $f(x_0)=\dfrac{2x_0^3}{3x_0^2-4}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

Ta có: $f'(x_0)=\dfrac{6x_0^4-24x_0^2}{(3x_0^2-4)^2}$ và $f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\pm 2$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\Leftrightarrow m=\pm 2$. Kiểm tra (2), ta thấy thỏa mãn.

Vậy: $M(-2;2)$ hoặc $M(2;-2)$.

Ví dụ 3: Lấy điểm M thuộc đồ thị $(C): y=-2x^3-3x^2+3$. Chứng minh rằng có nhiều nhất hai đường thẳng đi qua điểm M và tiếp xúc với (C)

Lời giải

Gọi $M(a;-2a^3-3a^2+3)$ là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số. Đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k, có phương trình:

$y=k(x-a)-2a^3-3a^2+3$.

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0;y_0)$ khi hệ phương trình:

$$\begin{cases}-2x_0^3-3x_0^2+3=k(x_0-a)-2a^3-3a^2+3 & (1)\\-6x_0^2-6x_0=k & (2)\end{cases}$$ có nghiệm x_0. Thay (2) vào (1), biến đổi và rút gọn ta được phương trình:

$(x_0-a)^2(4x_0+2a+3)=0$ tức $x_0=a$ hoặc $x_0=\dfrac{-2a-3}{4}$.

Vậy hệ phương trình (1), (2) có nhiều nhất 2 nghiệm, tức có nhiều nhất 2 đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với đồ thị (C).

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=-2x^3+4x^2+1$, có đồ thị là (C)

1. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(0;1)$ có hệ số góc là k. Tìm k để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt B, C khác A sao cho B nằm giữa A và C đồng thời $AC=3AB$;
2. Tìm trên trục tung những điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến (C)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. $d: y = kx + 1$. Với $k \neq 0$ và $k < 2$ thì (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt B và C khác A.

Khi đó $B(x_B; kx_B + 1)$, $C(x_C; kx_C + 1)$, $x_B < x_C$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình $2x^2 - 4x + k = 0$.

$AC = 3AB$ tức $x_C = 3x_B$ và $x_B + x_C = 2$, $x_B.x_C = \frac{k}{2}$ suy ra $k = \frac{3}{2}$.

2. Gọi $M(0; m)$ và (t) qua M có hệ số góc là a nên $(t): y = ax + m$.

(t) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} -2x_0^3 + 4x_0^2 + 1 = kx_0 + m \\ -6x_0^2 + 8x_0 = k \end{cases}$ có nghiệm x_0 suy ra $4x_0^3 - 4x_0^2 + 1 - m = 0$ có nghiệm x_0 $(*)$. Theo bài toán thì phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm, từ đó có được $m = \frac{11}{27}$ hoặc $m = 1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Tìm m để (Cm): $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+2)x^2 + 2mx + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$

2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{2x-1}$. (0;m) là một điểm thuộc trục Oy, $m \le 0$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua M và tiếp điểm của tiếp tuyến này với (C) có hoành độ dương.

Bài 2:

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tìm trên đường thẳng $d: y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C).

2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. Tìm trên đường thẳng (d): $y = 2$ các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

3. Chứng minh rằng từ một điểm thuộc đường thẳng $x = 2$ luôn kẻ được một tiếp tuyến duy nhất đến đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Bài 3:

1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$.

2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m), tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$.

3. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Cho điểm $A(0;a)$. Tìm a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

4. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

Bài 4: Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(2;9).

Bài 5: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{2-x}$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{4}{3}x + 1$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(2; –2).
3. Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

Bài 6: Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + mx + m + 1$ và (d) là tiếp tuyến của (Cm) tại điểm có hoành độ $x = -1$. Tìm m để

1. (d) đi qua điểm A(0;8).
2. (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{8}{3}$.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$, có đồ thị là (C).

1. Tìm tham số m để đồ thị (C) tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 + m$.
2. Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ x = a. Tìm a để (d) cắt lại (C) tại hai điểm E, F khác M và trung điểm I của đoạn E, F nằm trên parabol (P'): $y = -x^2 + 4$.

Bài 8:

1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ tiếp xúc với Parabol $y = x^2 + m$.
2. Tìm m để đồ thị hai hàm số sau tiếp xúc với nhau $(C_1): y = mx^3 + (1-2m)x^2 + 2mx$ và $(C_2): y = 3mx^3 + 3(1-2m)x + 4m - 2$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Tìm tham số m để đồ thị (Cm) của hàm số $y = x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 - x + 1$

Bài 9: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C)

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(-1;3)$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua giao điểm hai đường tiệm cận của (C).

Bài 10:

1. Tìm tham số m để đồ thị (C): $y = -x^3 + 2(m+1)x^2 - 5mx + 2m$ của hàm số tiếp xúc với trục hoành.
2. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + 4m$. Tìm tham số m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng (d): $y = 3$ tại hai điểm phân biệt.

Bài 11: Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 4}{x - 1}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Gọi (d) là một tiếp tuyến của (C), A, B lần lượt là giao điểm của (d) với trục hoành và trục tung. Viết phương trình của (d) sao cho
   i) HB = 4.HA với H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên (d).
   ii) Diện tích tam giác OAB bằng 4.

Bài 12: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{1 - x}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cắt trục tung tại điểm A sao cho $OA = \dfrac{9}{2}$.

3.Cho hai điểm M(1;0), N(0;3).
   a. Chứng tỏ rằng đường thẳng MN và (C) không có điểm chung.
   b. Viết phương trình tiếp tuyến (D)của (C) song song với đường thẳng MN và tìm E trên (C) sao cho tam giác EMN có diện tích nhỏ nhất.

Bài 13: Tìm tất cả các điểm trên Oy sao cho từ đó ta có thể vẽ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

Bài 14: Cho hàm số $y = 2x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$ có đồ thị là (C).

1. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua giao điểm của hai đường tiệm cận của (C).
2. Gọi M_1M_2 là hai điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M_1M_2 song song với nhau. Chứng minh rằng khi đó giao điểm I của hai đường tiệm cận của (C) là trung điểm của đoạn M_1M_2

Bài 15: Cho hàm số: $y = -4x^3 + 3x + 2$, có đồ thị là (C).

1. Tìm a để phương trình $4x^3 - 3x + 2a^2 - 3a = 0$ có hai nghiệm âm và một nghiệm dương;
2. Tìm những điểm trên đường thẳng $y = 3$ để từ đó có thể vẽ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị (C).

Dạng 3: Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị

Phương pháp.

Cho hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Hãy tìm tất cả các tiếp tuyến chung của (C) và (C').

Giả sử (T) là tiếp tuyến chung của (C) và (C').

(T) tiếp xúc với (C) và (C') lần lượt tại các điểm có hoành độ x_1, x_2. Khi đó: $(T): y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ và $(T): y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

Ta có hệ $\begin{cases} f'(x_1) = f'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = f(x_2) - x_2 f'(x_2) \end{cases} (*)$

Giả sử x_i là nghiệm của hệ $(*)$ với $i = 1,2,3,...,n$ thì các tiếp tuyến cần tìm là $(T_i): y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$.

TƯƠNG GIAO HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

<u>Định lí:</u> Cho hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Số giao điểm của hai đồ thị (C) và (C') chính là số nghiệm của phương trình: $f(x) = g(x)$.

Từ định lí này sẽ dẫn tới hai bài toán giao điểm sau:

Bài toán 1: Biện luận số nghiệm của phương trình: $F(x,m) = 0$ (m là tham số)

Phương pháp giải:

*Ta biến đổi phương trình $F(x,m) = 0$ về dạng $f(x) = g(m)$, trong đó ta đã biết đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ hoặc có thể dễ dàng vẽ được

*Để biện luận số nghiệm của phương trình, ta chuyển về biện luận số giao điểm của (C) và đường thẳng song song với Ox: $y = g(m)$ (ở đây chỉ xét trường hợp g(m) là đường thẳng //Ox)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài toán 2: Biện luận số giao điểm của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$

Phương pháp giải: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'):

$f(x) = g(x)$ (*).

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT TRỤC HOÀNH

Bài toán 01: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 1, 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT

Các ví dụ

Ví dụ 1:

Định m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + 2m$ cắt trục Ox tại điểm duy nhất.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m)$

Khi $m = 0$ thì $y' = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ thoả yêu cầu bài toán.

Khi $m \neq 0$ thì hàm số cho có 2 cực trị $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2m}{3}$.

Do đó đồ thị cắt Ox tại duy nhất 1 điểm khi $y(x_1).y(x_2) > 0 \Leftrightarrow 2m\left(2m - \frac{4m^3}{27}\right) > 0$

$\Leftrightarrow 4m^2\left(1 - \frac{2m^2}{27}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Vậy, với khi $m \in \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ thì đồ thị của hàm số cắt Ox tại điểm duy nhất.

Ví dụ 2: Định m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ tiếp xúc trục Ox tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Để đồ thị của hàm số tiếp xúc trục hoành hai điểm phân biệt thì đồ thị của hàm số phải có 2 điểm cực trị $\Rightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, tức là $3x^2 - 3m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$

Với $m \neq 0$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm $x = \pm m$ và $y(-m) = 2m^3 + 2m$, $y(m) = -2m^3 + 2m$

Đồ thị của hàm số tiếp xúc trục Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow y(-m) = 0$ hoặc $y(m) = 0$.

Với $y(-m) = 0 \Leftrightarrow 2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (loại)

Với $y(m) = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = \pm 1$

Vậy, với $m = \pm 1$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 3: Định m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt khi đồ thị của hàm số có hai cực trị đồng thời hai giá trị cực trị trái dấu.

Ta có: $y' = -3x^2 + 2mx$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y(0) = -m \\ x = \frac{2m}{3} \Rightarrow y\left(\frac{2m}{3}\right) = \frac{4}{27}m^3 - m \end{array}\right.$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$

Hai giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y(0).y\left(\frac{2m}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow (-m).\left(\frac{4}{27}m^3 - m\right) < 0$

$\Leftrightarrow m^2.(4m^2 - 27) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 27 > 0$ $(m \neq 0) \Leftrightarrow |m| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy, với $|m| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt

Ví dụ 4: Định m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox: $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, khi đó: (1) $\Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0$ (2) $\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = m - 1$

Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt khi (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < m \neq 2$.

Ví dụ 5: Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị $(C): y = -2x^3 + 6x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $A(0;1)$ và B là trung điểm của AC.

Lời giải

Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $-2x^3 + 6x^2 + 1 = mx + 1$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x(2x^2 - 6x + m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2.0^2 - 6.0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*) thì đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị (C) ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_1; mx_1 + 1)$; $C(x_2; mx_2 + 1)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vì B là trung điểm của AC nên có: $\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ \dfrac{mx_2 + 1 + 1}{2} = mx_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 \ (1)$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{2} \end{cases}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $m = 4$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$. Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

2. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$. Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

Bài 2:

1. Định m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - (2m-1)x + 4m + 2$ tiếp xúc trục Ox tại hai điểm phân biệt.

2. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$. Chứng minh đồ thị của hàm số luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt với mọi $m < 0$.

Bài 3: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để:

1. Hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ có đồ thị là (C_m) cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt.

Bài 4: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m$. Tìm m để (C_m) và trục hoành:

1. Có 4 điểm chung phân biệt.
2. Có 3 điểm chung.
3. Có hai điểm chung
4. Không có điểm chung.

Bài toán 02: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN HOÀNH ĐỘ CHO TRƯỚC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 - (m^2 + 4m + 1)x + 2(m^2 + 1)$, có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3.

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là số nghiệm của phương trình:

$x^3 + 2(m-1)x^2 - (m^2 + 4m + 1)x + 2(m^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + 2mx - (m^2 + 1)\right] = 0 \ (*)$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $f(x) = x^2 + 2mx - m^2 - 1 = 0$

Để đồ thị đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3 tức là phải có $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và có hoành độ nhỏ hơn 3.

$f(x) = 0$ 2 nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m + 3 \neq 0 \\ 2m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 2 \pm \sqrt{7}$

Với $m \neq 2 \pm \sqrt{7}$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 3$

Nên có hệ: $\begin{cases} (3-x_1)(3-x_2) > 0 \\ (3-x_1) + (3-x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \end{cases}$

Theo định lý vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1x_2 = -m^2 - 1 \\ x_1 + x_2 = -2m \end{cases}$

Do đó ta có $\begin{cases} -m^2 - 1 - 3(-2m) + 9 > 0 \\ -2m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 8 < 0 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{17} < m < 3 + \sqrt{17} \\ m > -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{17} < m < 3 + \sqrt{17}$. Đối chiếu điều kiện $m \neq 2 \pm \sqrt{7}$, thu được

$$m \in \left(3 - \sqrt{17}; 3 + \sqrt{17}\right) \backslash \left\{2 \pm \sqrt{7}\right\}$$

Vậy, với $m \in \left(3 - \sqrt{17}; 3 + \sqrt{17}\right) \backslash \left\{2 \pm \sqrt{7}\right\}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$, tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ít nhất 3 điểm phân biệt và chúng đều có hoành độ nhỏ hơn $\sqrt{3}$

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là số nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 \ (1)$$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

Đồ thị của hàm số cắt Ox tại ít nhất 3 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn $\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow f(t)$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 sao cho: $\left[\begin{array}{l} 0 = t_1 < t_2 < 3 \\ 0 < t_1 < 3 \leq t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(0) = 2m + 1 = 0 \\ S = 2(m+1) < 3 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(3) = 4 - 4m \leq 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases}$, nghĩa là phải có: $m = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$

Vậy, với $m = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$ thỏa mãn bài toán.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 3: Định m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0$

$\Leftrightarrow x^3-3mx^2-3x+3m+2=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(1-3m)x-3m-2\right]=0$ (1)

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $g(x)=x^2+(1-3m)x-3m-2=0$ (2)

Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức phải có hệ:

$\begin{cases}\Delta=(1-3m)^2+4(3m+2)>0\\ g(1)=-6m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3m^2+2m+3>0\\ m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0$ (a)

Giả sử $x_3=1; x_1, x_2$ là nghiệm của (2). Ta có: $x_1+x_2=3m-1;\ x_1x_2=-3m-2$.

Khi đó: $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1>15$

$\Leftrightarrow (3m-1)^2+2(3m+2)-14>0 \Leftrightarrow m^2-1>0 \Leftrightarrow m<-1 \vee m>1$ (b)

Từ (a) và (b) ta có gía trị cần tìm là: $m<-1$ hoặc $m>1$.

Ví dụ 4. Hàm số $y=x^3-2(m+1)x^2+(5m-2)x-2m+4$ (1), m là tham số. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số (1). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho:

1. A (2; 0) là trung điểm của đoạn BC
2. B, C có hoành độ nhỏ hơn 1.
3. BC có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox.

$x^3-2(m+1)x^2+(5m-2)x-2m+4=0$ (*) $\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2mx+m-2)=0$

$\Leftrightarrow x=2,\ g(x)=x^2-2mx+m-2=0$

(C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_g>0\\ g(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\\ 4-4m+m-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\ m\neq\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow m\neq\frac{2}{3}.$

1. A là trung điểm của đoạn BC

Vì ba điểm A, B, C thuộc trục hoành do đó A là trung điểm của BC

$\Leftrightarrow x_A=\frac{x_B+x_C}{2} \Leftrightarrow 2=\frac{2m}{2} \Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn điều kiện $m\neq\frac{2}{3}$).

2. B, C có hoành độ nhỏ hơn 1.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của B, C cũng là nghiệm phương trình $g(x)=0$

Theo bài toán, ta có: $\begin{cases}x_1<1\\ x_2<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-1<0\\ x_2-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-1+x_2-1<0\\ (x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2<2\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m<2\\ m-2-2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\ m<-1\end{cases} \Leftrightarrow m<-1$

Vậy, $m<-1$ là giá trị cần tìm.

Cách khác:

Hai nghiệm của $g(x)=0$ là $x_1=m-\sqrt{m^2-m+2}$, $x_2=m+\sqrt{m^2-m+2}$.

Vì $x_1<x_2$ nên $\begin{cases}x_1<1\\ x_2<1\end{cases} \Leftrightarrow x_2<1 \Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-m+2}<1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+2}<1-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m+2\geq 0\\ 1-m>0\\ m^2-m+2<m^2-2m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\ m<1\\ m<-1\end{cases} \Leftrightarrow m<-1.$

3. BC có độ dài nhỏ nhất.

$BC=|x_1-x_2|=2\sqrt{m^2-m+2}=2\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\geq\sqrt{7}.$

$BC=\sqrt{7} \Leftrightarrow m-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện $m\neq\frac{2}{3}$).

Chú ý. Ta cũng có thể dùng định lí Vi-ét để tính BC như sau

$BC^2=|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2-4(m-2)=4(m^2-m+2)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn $\sqrt{3}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m+3$, xác định m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ thoả mãn $x_1<x_2<x_3<1<2<x_4$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 3: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y = x^3 - (4m+3)x^2 + (m+2)x + 3m$ có hai cực trị trái dấu.

2. $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3mx - m + 1$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm.

3. $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

4. $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 1$ (Cm) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2

Bài 4: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m - 6$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$.

2. $y = x^3 - 2x^2 - (3m-1)x + m + 3$ cắt đường thẳng $d: y = (1-m)x + m - 5$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < x_2 < 1 < x_3$.

3. $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ (Cm) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4$.

Bài 5: Tìm m để đồ thị (C_m) $y = x^3 - (2m+3)x^2 + (2m^2 - m + 9)x - 2m^2 + 3m - 7$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, trong đó có hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 và khoảng cách giữa hai điểm này là lớn nhất.

Bài 6:

1. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 15$.

2. Tìm m để hàm số $y = -x^4 + 4mx^2 - 4m$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt M, N, P, Q ($x_M < x_N < x_P < x_Q$) sao cho $MQ = 2NP$.

Bài 7: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^4 - (3m-1)x^2 + 2m^2 + 2m - 12$, m là tham số.

1. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt trong đó có ba điểm có hoành độ nhỏ hơn 1 và một điểm có hoành độ lớn hơn 2.

2. Tìm m để (C_m) và trục Ox chỉ có hai điểm chung B, C sao cho tam giác ABC đều với A(0;2).

Bài toán 03: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT CÓ HOÀNH ĐỘ LẬP THÀNH CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

Phương pháp giải

1. *Tìm điều kiện để đồ thị (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \ne 0)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng.*

(C) cắt trục hoành nên có: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (*)

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng ⇔ phương trình (*) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1)

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3\right] \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào (*) để suy ra điều kiện cần tìm.

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần nên phải thử lại kết quả tìm được.

2. *Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số nhân.*

Giả sử (*) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân ⇔ phương trình (*) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1x_3 = x_2^2$ (3).

Từ (3) và (2) suy ra ⇒ $x_2^3 = -\dfrac{d}{a}$ là 1 nghiệm của (*).

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào (*) để suy ra điều kiện cần tìm.

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần nên phải thử lại kết quả tìm được.

3. *Tìm điều kiện để đồ thị (C): $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \ne 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng*

⇔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ $at^2 + bt + c = 0$ $(t = x^2)$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 (giả sử $t_1 < t_2$) (1)

Khi đó các nghiệm của (1) là: $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Vì $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng nên

$$\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_1}\right) \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \ (2)$$

Giải điều kiện: (1),(2)

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Định m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

2. Cho hàm số $y = x^3 - (4m+5)x^2 + (3m^2 + 12m + 8)x - 7m^2 - 8m$ có đồ thị (C_m). Với m là tham số thực. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ (*)

Giả sử đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ thì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình (*).

Khi đó: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (1)$$

Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$ (2).

Thế (2) vào (1) ta có: $x_2 = 1$.

Thay $x_2 = 1$ vào phương trình (*), tìm được $m = 11$.

Với $m = 11$ thì phương trình (*) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$, phương trình này có 3 nghiệm $x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + 2\sqrt{3}$ thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_3 = 2x_2$

Vậy, $m = 11$ thì đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng có công sai $d = 2\sqrt{3}$

2. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hoành độ giao điểm của trục hoành và (C_m) là nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4m + 5)x^2 + (3m^2 + 12m + 8)x - 7m^2 - 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - m)\left[x^2 - (3m + 5)x + 7m + 8\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = m \text{ hoặc } g(x) = x^2 - (3m + 5)x + 7m + 8 = 0$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt khác m tức phải có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 2m - 7 > 0 \\ -2m^2 + 2m + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2} \neq m < -1 \\ \dfrac{7}{9} < m \neq \dfrac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. (*)$$

Với điều kiện (*) thì (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3.

Để thuận tiện trong việc tính toán, giả sử các nghiệm lập thành cấp số cộng của phương trình hoành độ là $x_0 - d$, x_0, $x_0 + d$ với d là công sai. Khi đó đẳng thức sau luôn đúng

$$x^3 - (4m + 5)x^2 + (3m^2 + 12 + 8)x - 7m^2 - 8m = (x - x_0 - d)(x - x_0)(x - x_0 + d)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 5 = 3x_0 \\ 3m^2 + 12m + 8 = 3x_0^2 - d^2 \\ 7m^2 + 8m = x_0^3 - x_0d^2 \end{cases} \Leftrightarrow 7m^2 + 8m = \left(\frac{4m + 5}{3}\right)^3 - \frac{4m + 5}{3} \cdot \frac{7m^2 + 4m + 1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 10m^3 + 51m^2 - 6m - 55 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -5 \text{ hoặc } m = -\frac{11}{10}$$

Kết hợp với điều kiện $\dfrac{1 - \sqrt{17}}{2} \neq m < -1$ hoặc $\dfrac{7}{9} < m \neq \dfrac{1 + \sqrt{17}}{2}$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -5$ hoặc $m = -\dfrac{11}{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Định m để đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2(m + 2)x^2 - 2m - 3$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4 + 2(m + 2)x^2 - 2m - 3 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (1) trở thành $g(t) = -t^2 + 2(m + 2)t - 2m - 3$ (2)

Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 $\Leftrightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$, tức là phải có:

$$\begin{cases} \Delta' = (m + 2)^2 - 2m - 3 > 0 \\ S = 2(m + 2) > 0 \\ P = 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 > 0 \\ m > -2 \\ m > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases} (*)$$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m + 2) & (a) \\ t_1t_2 = 2m + 3 & (b) \end{cases}$

Khi đó phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt:

$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$.

Ta có: x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow$ $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$

$\Leftrightarrow -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ (c)

Từ (a) và (c), ta có: $t_1 = \dfrac{1}{5}(m + 2)$, $t_2 = \dfrac{9}{5}(m + 2)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Thế vào (b), ta được: $\frac{1}{5}(m+2).\frac{9}{5}(m+2)=2m+3 \Leftrightarrow 9m^2-14m-39=0 \Leftrightarrow m=-\frac{13}{9}$ hoặc $m=3$ (thỏa (*)).

Vậy, với $m=-\frac{13}{9}$ hoặc $m=3$ thỏa mãn bài toán

Ví dụ 3:

1. Định m để đồ thị của hàm số $y=x^3-(2m+5)x^2+14mx-8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân.

2. Cho hàm số $y=-x^3+(3m+1)x^2-2(3m+1)x+8$. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-(2m+5)x^2+14mx-8=0$ (*).

Đk cần: Giả sử đồ thị của hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2;x_3$ lần lượt lập thành cấp số nhân.

Khi đó ta có: $x^3-(2m+5)x^2+14mx-8=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Suy ra: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2m+5 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=14m \\ x_1x_2x_3=8 \end{cases}$

$x_1;x_2;x_3$ lần lượt lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x_1x_3=x_2^2 \Rightarrow x_2^3=8 \Rightarrow x_2=2$

Với $x_2=2$ là nghiệm của phương trình (*), nên có: $2^3-(2m+5)2^2+14m.2-8=0$ hay $m=1$

Với $m=1$ thay vào (*) ta được: $x^3-7x^2+14x-8=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$ hoặc $x=4$ thấy thỏa mãn.

Vậy, $m=1$ thỏa mãn đề bài.

2. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Cách 1: Hoành độ giao điểm của trục hoành và (C_m) là nghiệm của phương trình

$-x^3+(3m+1)x^2-2(3m+1)x+8=0$

Giả sử phương trình có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là x_1, x_2, x_3 với $x_1x_3=x_2^2$. (1)

Khi đó: $-x^3+(3m+1)x^2-2(3m+1)x+8=-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ (2)

Phân tích vế trái trở thành $-x^3+(x_1+x_2+x_3)x^2-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x+x_1x_2x_3$

Phương trình (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1=x_1+x_2+x_3 \\ 2(3m+1)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \\ 8=x_1x_2x_3 \end{cases}$

Từ (1) ta có $8=x_1x_2x_3=8=x_2^3 \Leftrightarrow x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3=3m-1$ nên x_1, x_3 là nghiệm của phương trình $t^2-(3m-1)t+4=0$ và $x_1, x_3 \neq 2$ tức là có hệ:

$\begin{cases} (3m-1)^2-4.4>0 \\ 4-(3m-1)2+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-5)(3m+3)>0 \\ 5-3m\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{5}{3} \\ m<-1 \end{array}\right.$

Cách 2:

$-x^3+(3m+1)x^2-2(3m+1)x+8=0=(2-x)\left[x^2-3(m+1)x+4\right]$

Do đó $x=2$ và $g(x)=x^2-3(m+1)x+4=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 2 và tích hai nghiệm luôn bằng 4.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị là (C_m). Định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Bài 2: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=x^4-(3m-2)x+2m^2-5m-1$, m là tham số. Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng (d): $y-2=0$ tại 4 điểm phân biệt

1. Có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

2. Có hoành độ lớn hơn – 4.

Bài 3: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y=x^3+3x^2+(4m-1)x+2m^2-3$ cắt Ox tại ba điểm A, B, C sao cho $AB=BC$.

2. $y=x^4-2mx^2+2m+3$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D sao cho $AB=BC=CD$.

3. Cho hàm số $y=x^3+px^2+pqx+q^3$ có đồ thị là (C), với p, q là các số thực cho trước thỏa mãn $p>3q>0$. Chứng minh rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ lập thành một cấp số nhân.

4. $y=x^4-10mx^2+6m+3$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Dạng 2: TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

Phương pháp

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ là: $f(x) = g(x)$ (*)
- Biện luận số nghiệm của phương trình (*), số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của (C) và (C').

Bài toán 01: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT

Các ví dụ

Ví dụ 1: Định m để đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = mx - 2m - 4$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1) - m(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m)$ (1) $\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $g(x) = x^2 - 4x + 1 - m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m + 3 > 0 \\ g(2) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

Vậy, với $m > -3$ thì (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Ví dụ 2: Định m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt đồ thị (C) $y = 4x^3 - 6mx^2 + 1$ tại 3 điểm A(0; 1), B, C phân biệt sao cho B, C đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$4x^3 - 6mx^2 + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } 4x^2 - 6mx + 1 = 0 \text{ (1)}$$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0, tức là phải có: $m < -\frac{2}{3}$ hoặc $m > \frac{2}{3}$ (2)

Khi đó giả sử $B(x_1; -x_1 + 1)$, $C(x_2; -x_2 + 1)$.

B, C đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -x_1 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$ (không thoả mãn (2)).

Vậy, không có giá trị m thoả mãn.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng (Δ) $y = (2m-1)x - 4m - 1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-1)x + 2$. Tìm m để đồ thị hàm số cho cắt đường thẳng $(\Delta): y = -6x + 2$ tại 3 điểm phân biệt A(0,2), B, C sao cho: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\sqrt{1221} = 444BC$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của *m*.

Bài 4: Tìm m để đồ thị hàm số:

1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + m$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt.
2. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và (d) là đường thẳng đi qua điểm $I(1;2)$ của (C) và có hệ số góc là m cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, M, N sao cho tam giác AMN vuông cân tại $A(2;-1)$.
3. $y = x^3 - 3mx^2 + 3m(m-2)x - m^3 + 3m^2 + m$ cắt parabol $y = -3x^2$ tại ba điểm phân biệt.
4. Tìm tham số m sao cho đồ thị (C): $y = x^3 + 3x^2$ và (H_m): $y = \frac{(m+1)x + m - 35}{x+1}$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

Bài toán 02: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN HOÀNH ĐỘ CHO TRƯỚC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Giả sử đường thẳng $(d): y = x + 10 - 3m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C có hoành độ lần lượt x_1, x_2, x_3. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 11$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với đường thẳng (d) là

$x^3 - 3mx^2 + 8x + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 + (1-3m)x + 9 - 3m\right] = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x = 1$ (giả sử $x_3 = 1$) hoặc $x^2 + (1-3m)x + 9 - 3m = 0$ (2).

Để đường thẳng (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, tức là phải có:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\begin{cases}\Delta=(1-3m)^2-4(9-3m)>0\\ 1+1-3m+9-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;-\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)\\ m\neq\dfrac{11}{6}\end{cases}\quad(3)$$

Với điều kiện (3), phương trình (2) có $\begin{cases}x_1+x_2=3m-1\\ x_1x_2=9-3m\end{cases}$ (theo định lý Vi-ét)

$x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 11\Leftrightarrow 1+(3m-1)^2-2(9-3m)\leq 11\Leftrightarrow m^2\leq 3\Leftrightarrow m\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $m\in\left(\dfrac{5}{3};\sqrt{3}\right]$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+5}{x+m}$ có đồ thị là (C_m). Với m là tham số thực khác 0 và đường thẳng d có phương trình $y=2x-\dfrac{1}{2}$. Tìm m để d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2-9x_1=8x_2$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;-m)\cup(-m;+\infty)$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và (C_m) là nghiệm của phương trình

$$\frac{2mx+5}{x+m}=2x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x^2-x-m-10=0\ (\forall x\neq -m)$$

Đặt $g(x)=4x^2-x-m-10$. Để d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m$ tức phải có:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ g(-m)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16m+161>0\\ 2m^2-5\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{161}{16}\\ m\neq\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$$

Áp dụng Vi-ét cho x_1, x_2 ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{m+10}{4}\end{cases}$

Xét điều kiện bài toán $x_1^2-9x_1=8x_2\Leftrightarrow x_1^2-9x_1=8\left(\dfrac{1}{4}-x_1\right)$

$\Leftrightarrow x_1^2-x_1-2=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$.

Với $x_1=-1\Rightarrow x_2=\dfrac{5}{4}\Rightarrow m=-5$

Với $x_1=2\Rightarrow x_2=-\dfrac{7}{4}\Rightarrow m=4$

Kết hợp với điều kiện $m>-\dfrac{161}{16}$ và $m\neq\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy $m=-5$ hoặc $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3mx+m}{x+2}$ có đồ thị là (C_m) Với m là tham số thực và đường thẳng $(d):y=-x+3$. Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tích các khoảng cách từ hai điểm M, N đến đường thẳng $(\Delta):2x-y+5=0$ không lớn hơn $\dfrac{37}{2}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và (C_m) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2-3mx+m}{x+2}=-x+3\Leftrightarrow g(x)=2x^2-(3m+1)x+m-6=0\ (\forall x\neq -2)$$

Để d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khác -2 tức phải có: $\begin{cases}\Delta>0\\ g(-2)\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2-2m+49>0\\ 2(-2)^2+2(3m+1)+m-6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3m-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{440}{9}>0\ (\forall m\in\mathbb{R})\\ m\neq-\dfrac{4}{7}\end{cases}\Rightarrow m\neq-\frac{4}{7}$$

Áp dụng Vi-ét cho x_1, x_2 ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3m+1}{2}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-6}{2}\end{cases}$

Ta có: $M(x_1;-x_1+3)$, $N(x_2;-x_2+3)$, $(\Delta):2x-y+5=0$

$$d(M;\Delta)=\frac{|3x_1+2|}{\sqrt{5}},d(N;\Delta)=\frac{|3x_2+2|}{\sqrt{5}}\Rightarrow d(M;\Delta).d(N;\Delta)=\frac{|(3x_1+2)(3x_2+2)|}{5}.$$

$$=\frac{|9x_1x_2+6(x_1+x_2)+4|}{5}=\frac{\left|\dfrac{27m-40}{2}\right|}{5}=\frac{|27m-40|}{10}$$

Mà $d(M;\Delta).d(N;\Delta)\leq\dfrac{37}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|27m-40|}{10}\leq\dfrac{37}{2}\Leftrightarrow|27m-40|\leq 185\Rightarrow-\dfrac{145}{7}\leq m\leq\dfrac{25}{3}$

Kết hợp với điều kiện suy ra $-\dfrac{145}{27}\leq m\leq\dfrac{25}{3}$ và $m\neq-\dfrac{4}{7}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - (m^2 + m - 3)x + m^2 - 3m + 2$ (1), trong đó m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng y = 2 tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 và đồng thời thỏa mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 18$

Bài 2. Tìm m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ cắt đường thẳng y = −1 tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4$.

Bài toán 03: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm m để đường thẳng d: $y = -x + 1$ cắt đồ thị (C) hàm số $y = 4x^3 - 6mx^2 + 1$ tại 3 điểm A(0;1), B, C sao cho:

1. B, C đối xứng qua y = x   2. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = -4$

Lời giải

d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm A(0;1), B, C khi $4x^3 - 6mx^2 + 1 = -x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt tức phương trình $4x^2 - 6mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là $\begin{cases} \Delta' = 9m^2 - 4 > 0 \\ 4.0^2 - 6m.0 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| > \frac{2}{3}$.

Giả sử $B(x_1; -x_1 + 1)$, $C(x_2; -x_2 + 1)$ là giao điểm d và (C).

1. Để B và C đối xứng nhau qua y = x khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 = y_2 = -x_2 + 1 \\ x_2 = y_1 = -x_1 + 1 \end{cases}$ hay

$x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

Đối chiếu điều kiện, suy ra không có m để thỏa bài toán.

2. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = -4 \Leftrightarrow x_1.x_2 + (-x_1 + 1)(-x_2 + 1) = -4$ hay $2x_1.x_2 - (x_1 + x_2) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = mx^3 - 6x^2 + 9mx - 3$, có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng (d): $y = \frac{9}{4}x - 3$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt A(0;−3), B, C thỏa điều kiện B nằm giữa A và C đồng thời AC = 3AB.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Số giao điểm của đồ thị đã cho với đường thẳng d là số nghiệm của phương trình:

$mx^3 - 6x^2 + 9mx - 3 = \frac{9}{4}x - 3 \Leftrightarrow x\left(mx^2 - 6x + 9m - \frac{9}{4}\right) = 0$ (1) $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc

$mx^2 - 6x + 9m - \frac{9}{4} = 0$ (2)

Để đường thẳng d đồ thị đã cho cắt tại ba điểm phân biệt A(0;−3), B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt A(0;−3), B, C tức là (2) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9 - m\left(9m - \frac{9}{4}\right) > 0 \\ 9m - \frac{9}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m^2 + \frac{m}{4} + 1 > 0 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{1-\sqrt{65}}{8} < m < \frac{1+\sqrt{65}}{8} \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Gọi $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ với $y_1 = \frac{9}{4}x_1 - 3, y_2 = \frac{9}{4}x_2 - 3$,

trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của (2)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1 + 3)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2; y_2 + 3)$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ y_2 + 3 = 3(y_1 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 3x_1$

Ta có hệ: $\begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 = \frac{6}{m} \\ x_1x_2 = 9 - \frac{9}{4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2m} \\ x_2 = \frac{9}{2m} \\ x_1x_2 = 9 - \frac{9}{4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2m} \\ x_2 = \frac{9}{2m} \\ 4m^2 - m - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$

Vậy với m = 1 hoặc $m = -\frac{3}{4}$ thỏa mãn đầu bài.

Ví dụ 3.

Tìm trên (C): $y = 2x - 1 - \frac{2}{x-1}$ hai điểm M, N thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) MN song song với đường thẳng y = x

ii) $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AN}$ với A là giao điểm của đường thẳng MN với trục Ox.

Lời giải

MN song song đường thẳng y = x ⇒ Phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, N là y = x + m (m ≠ 0).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$2x-1-\frac{2}{x-1}=x+m \Leftrightarrow x^2-(m+2)x+m-1=0$ (1) (do x = 1 không là nghiệm của (1)). (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=(m+2)^2-4m+4>0 \Leftrightarrow m^2+8>0 \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó hai nghiệm của (1) là $x_1=\frac{m+2-\sqrt{m^2+8}}{2}$, $x_2=\frac{m+2+\sqrt{m^2+8}}{2}$

Giao điểm A của (d) và trục Ox có tọa độ là $(-m;0)$

Hoành độ của M,N là hai nghiệm của phương trình (1)

Vì A, M, N thẳng hàng và $\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+m=4x_2+4m \\ x_2+m=4x_1+4m \end{array}\right.$

$^*x_1+m=4x_2+4m \Leftrightarrow \frac{m+2-\sqrt{m^2+8}}{2}=4\frac{m+2+\sqrt{m^2+8}}{2}+3m$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{m^2+8}=-9m-6 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -\frac{2}{3} \\ 14m^2+27m-41=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -\frac{2}{3} \\ m=1 \vee m=-\frac{41}{14} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{41}{14}$.

$^*x_2+m=4x_1+4m \Leftrightarrow \frac{m+2+\sqrt{m^2+8}}{2}=4\frac{m+2-\sqrt{m^2+8}}{2}+3m$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{m^2+8}=9m+6 \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -\frac{2}{3} \\ 14m^2+27m-41=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Vậy $m=1$ hoặc $m=-\frac{41}{14}$.

Chú ý. Ta có thể dùng định lí Vi-ét để giải bài toán này như sau.

$\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow x_1+m=4x_2+4m \Leftrightarrow x_1=4x_2+3m$.

Kết hợp với định lí Vi-ét, ta có hệ $\begin{cases} x_1+x_2=m+2 \\ x_1x_2=m-1 \\ x_1=4x_2+3m \end{cases}$ (I)

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4x_2+3m \\ 5x_2+3m=m+2 \\ x_1.x_2=m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{2-2m}{5} \\ x_1=\frac{8+7m}{5} \\ (2-2m)(8+7m)=25(m-1) \text{ (a)} \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow 14m^2+27m-41=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=-\frac{41}{14}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập. Giả sử đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. I là giao điểm 2 đường tiệm cận.

1. Tìm tham số m để tam giác IAB đều.
2. Gọi d' là đường thẳng đi qua I và cắt đồ thị (C) của hàm số tại 2 điểm phân biệt C,D. Lập phương trình đường thẳng d' để có $\overrightarrow{CD}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CI}$.

Bài toán 04: ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2 ĐIỂM THUỘC 1 HOẶC 2 NHÁNH CỦA ĐỒ THỊ

Ví dụ

Ví dụ: Cho hàm số: $y=\frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (H). Chứng minh rằng: đường thẳng d: $y=2x+m$ luôn cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt nằm trên hai nhánh của (H).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và đường thẳng d là:

$\frac{x+3}{x+1}=2x+m$ $(x\ne -1) \Leftrightarrow x+3=(x+1)(2x+m)$ ($x=-1$ không thỏa mãn phương trình) $\Leftrightarrow g(x)=2x^2+(m+1)x+m-3=0$ (1)

Ta có $\Delta=(m+1)^2-8(m-3)=m^2-6m+25=(m-3)^2+16>0$ $\forall m\in\mathbb{R}$

Với $\forall m\in\mathbb{R}$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{m+1}{2} \\ x_1x_2=\frac{m-3}{2} \end{cases}$

Ta có $(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=\frac{m-3}{2}-\frac{m+1}{2}+1=-1<0$

Suy ra -1 nằm giữa hai nghiệm x_1,x_2

Vậy d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía đối với tiệm cận đứng $x=-1$, tức là hai điểm đó nằm trên hai nhánh của đồ thị (H) (đpcm)

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Gọi (d_m) là đường thẳng đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để đường thẳng (d_m) cắt đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x+1}$ của hàm số.

1. Tại hai điểm phân biệt.
2. Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 2:

1. Tìm m để đường thẳng $\Delta: y=\frac{1}{2}x+m$ cắt đồ thị $(C): y=\frac{2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm AB nằm trên đường thẳng $2x+y-4=0$.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x$ (C) và d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O có hệ số góc k. Tìm k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt O, A, B sao cho $AB=\sqrt{17}$

3. Chứng minh rằng nếu đồ thị $(C): y=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$ cắt đường thẳng $d: y=x+2m$ tại hai điểm phân biệt thì hai điểm đó nằm về một nhánh của (C).

Bài toán 05: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT CÓ ĐỘ DÀI CHO TRƯỚC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x$ có đồ thị là (C) và d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O có hệ số góc k. Tìm k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt O, A, B sao cho AB bằng $\sqrt{17}$.

Lời giải

Đường thẳng d có phương trình: $y=kx$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x^3-3x^2+6x=kx \Leftrightarrow x(x^2-3x+6-k)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2-3x+6-k=0$ (*)

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=4k-15>0\\6-k\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k>\frac{15}{4}\\k\neq 6\end{cases}$.

Khi đó $A(x_1;kx_1)$, $B(x_2;kx_2)$

Suy ra $AB^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2=(1+k^2)(4k-15)$

Nên $AB=\sqrt{17} \Leftrightarrow (1+k^2)(4k-15)=17 \Leftrightarrow 4k^3-15k^2+4k-32=0 \Leftrightarrow k=4$.

Vậy, $k=4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt đồ thị $(C): y=\frac{x-1}{1-2x}$ của hàm số tại A và B sao cho $AB\geq|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ (O là gốc tọa độ).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x+m=\frac{x-1}{1-2x} \Leftrightarrow f(x)=2x^2+2mx-m-1=0$ (*), $x\neq\frac{1}{2}$

Vì $\begin{cases}\Delta'=m^2+2m+2>0, \forall m\in\mathbb{R}\\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\neq 0\end{cases}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$

Suy ra d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1;x_1+m)$, $B(x_2;x_2+m)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của (*). Theo Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\x_1x_2=\frac{-m-1}{2}\end{cases}$

Khi đó: $AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{2m^2+4m+4}$

$AB\geq|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow \sqrt{2m^2+4m+4}\geq\sqrt{2m^2} \Leftrightarrow m\geq -1$

Vậy, $m\geq -1$ thỏa bài toán.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y=\frac{2x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $(d): y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+m}$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $(d): y=x+2$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{2}$.

Bài 2: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ để đường thẳng $(d): y=x+m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2+OB^2=\frac{37}{2}$.

Bài toán 06: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT CÓ ĐỘ DÀI NHỎ NHẤT

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ có đồ thị (H). Xác định m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (H) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất, với $A(-1;1)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\frac{x}{1-x} = mx - m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow$ $m < 0$.
Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow$ I(1;–1) cố định.

Ta có: $AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \frac{MN^2}{2}$, do đó $AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN nhỏ nhất

$MN^2 = (x_2 - x_1)^2(1+m^2) = -4m - \frac{4}{m} \geq 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $m = -1$.

Vậy: $\min(AM^2 + AN^2) = 20$ khi $m = -1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ có đồ thị (H). Xác định m để đường thẳng $(d): y = mx - 2$ cắt (H) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị.

$$\frac{x-1}{x-3} = mx - 2 \quad \Leftrightarrow \quad mx^2 - 3(m+1)x + 7 \quad (*)$$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khi và chi khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\neq 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9(m+1)^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow m \neq 0. \\ -2 \neq 0 \end{cases}$

Gọi $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị.

Khi đó $\begin{cases} y_1 = mx_1 - 2 \\ y_2 = mx_2 - 2 \end{cases}$ và x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên

$x_1 + x_2 = \frac{3(m+1)}{m}$, $x_1.x_2 = \frac{7}{m}$.

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1+m^2)(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(1+m^2)\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right]}$$

$$= \sqrt{(1+m^2)\left[\frac{9(m+1)^2}{m^2} - 4.\frac{7}{m}\right]} = \sqrt{9\left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right) - 10\left(m + \frac{1}{m}\right) + 18}$$

Đặt $t = m + \frac{1}{m}$ (điều kiện $|t| \geq 2$), suy ra $m^2 + \frac{1}{m^2} = t^2 - 2$. Khi đó $MN = \sqrt{9t^2 - 10t}$.

Dùng đạo hàm tìm GTNN của hàm số

$f(t) = \sqrt{9t^2 - 10t}$ trên các khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$.

Ta tìm được $\min f(t) = f(2) = 4$ khi $t = 2$.

Với $t = 2 \Rightarrow m + \frac{1}{m} = 2 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy, MN nhỏ nhất bằng 4, khi $m = 1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số: $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (H). Giả sử đường thẳng $d: y = 2x + m$ luôn cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt M,N. Tìm m để độ dài MN ngắn nhất.

2. Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = -x + m$ luôn cắt (C): $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đoạn AB ngắn nhất.

3. Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị $y = \frac{3x-2}{2x+1}$ tại 2 điểm phân biệt M, N thuộc 2 nhánh khác nhau sao cho MN ngắn nhất.

Bài 2: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x+1}$, (d) là đường thẳng $y = 4x + m$, m là tham số. Tìm tham số m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho:
1. Độ dài AB nhỏ nhất.
2. Tam giác IAB có diện tích bằng 7 với I(1;0) và *m > 0*.

Bài toán 07: ĐỒ THỊ CỦA HAI HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2,3,4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc k. Tìm k để Δ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho tam giác OBC có trọng tâm $G\left(\frac{5}{3};2\right)$ (O là gốc toạ độ).

2. Cho hàm số: $y = (2-m)x^3 - 6mx^2 + 9(2-m)x - 2$ có đồ thị (C_m), m là tham số. Tìm m để đường thẳng $d: y = -2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;-2)$, B và C sao cho diện tích tam giác OBC bằng $\sqrt{13}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Lời giải

1. Phương trình đường thẳng Δ: $y = k(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = k(x+1) \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } (x-3)^2 = k$$

Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (x-3)^2 = k$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow 0 < k \neq 16$

Khi đó toạ độ các giao điểm là: $A(-1;0)$, $B(3+\sqrt{k};k(4+\sqrt{k}))$, $C(3-\sqrt{k};k(4-\sqrt{k}))$.

Do đó tọa độ trọng tâm ΔOBC: $\begin{cases} x_G = \frac{5}{3} \\ y_G = \frac{8k}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$ (thoả điều kiện).

Vậy, $k = \frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

2. Phương trình hoành độ giao điểm là: $(2-m)x^3 - 6mx^2 + 9(2-m)x - 2 = -2$

$\Leftrightarrow (2-m)x^3 - 6mx^2 + 9(2-m)x = 0$ (1) $\Leftrightarrow x\left[(2-m)x^2 - 6mx + 9(2-m)\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $(2-m)x^2 - 6mx + 9(2-m) = 0$ (2)

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $A(0;-2)$, B và C khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 ta có điều kiện: $\begin{cases} \Delta = 9m^2 - 9(2-m)^2 > 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Gọi tọa độ điểm $B(x_B;-2), C(x_C;-2)$, $x_B \neq x_C$

Gọi h là khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng $d: y + 2 = 0 \Rightarrow h = 2$

Theo bài ra ta có: $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}h.BC = \sqrt{13} \Rightarrow BC = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C = 13$ (3)

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = \frac{6m}{2-m} \\ x_Bx_C = 9 \end{cases}$ (4)

Thay (3) vào (4) ta được: $\left(\frac{6m}{2-m}\right)^2 - 36 = 13 \Leftrightarrow m = \frac{14}{13}$ hoặc $m = 14$

Ví dụ 2:

1. Tìm m để đồ thị hàm số của hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2$ cắt đường thẳng $\Delta: y = -x + 2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$.

2. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

Lời giải

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2 = -x + 2$ (1)

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $g(x) = x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0$ (2)

Đường thẳng (Δ) cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A(0;2), B, C ⇔ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là phải có:

$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \vee m < 1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$

Gọi $B(x_1;y_1)$ và $C(x_2;y_2)$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (2) khi đó:

$y_1 = -x_1 + 2$ và $y_2 = -x_2 + 2$

Ta có $h = d(M;(\Delta)) = \frac{|3+1-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \frac{2S_{MBC}}{h} = \frac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

Mà $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = 8(m^2 - 3m + 2)$

Suy ra $8(m^2 - 3m + 2) = 16 \Leftrightarrow m = 0$ (thoả mãn) hoặc $m = 3$ (thoả mãn)

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = 3$ (thoả mãn)

2. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và (C) là nghiệm của phương trình

$\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - (m-4)x + 1 - m = 0$ $(\forall x \neq -1)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình trên có hai nghiệm phân biện khác -1 $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$

Áp dụng Vi-ét cho x_1, x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m-4}{2} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{2} \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d cắt (C) $A(x_1;-2x_1+m)$, $B(x_2;-2x_2+m)$ nên

$\overrightarrow{OA} = (x_1;-2x_1+m)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2;-2x_2+m)$

Do đó $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + (-2x_1+m)(-2x_2+m) = 5x_1x_2 - 2m(x_1+x_2) + m^2 = \frac{3m+5}{2}$

Mà tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \frac{3m+5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y=\frac{2x-m}{mx+1}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $d: y=2x-2m$ tại hai điểm phân biệt A, B thuộc một đường (C) cố định. Đường thẳng *d* cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N. Tìm *m* để $S_{\Delta OAB}=3S_{\Delta OMN}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{2x-m}{mx+1}=2x-2m$

$\Leftrightarrow 2mx^2-2m^2x-m=0$ (2), $x\neq -\frac{1}{m}$ $\Leftrightarrow f(x)=2x^2-2mx-1=0$ (*), $x\neq -\frac{1}{m}$

Xét (*) có $\begin{cases}\Delta'=m^2+2>0\\ f\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{2}{m^2}+1\neq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \forall m\neq 0 \Rightarrow$ d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

Ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=m\\ x_A.x_B=-\frac{1}{2}\\ y_A=2x_A-2m\\ y_B=2x_B-2m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_A=\frac{1}{x_A}\\ y_B=\frac{1}{x_B}\end{cases}\Rightarrow$ A, B nằm trên đường (C): $y=\frac{1}{x}$ cố định.

$h=d(O,d)=\frac{|-2m|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}|m|$, $AB=\sqrt{5}.\sqrt{m^2+2}$, $M(m;0), N(0;-2m)$

$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}h.AB=|m|\sqrt{m^2+2}$, $S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=m^2$; $S_{OAB}=3S_{OMN}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$ (vì $m\neq 0$)

Vậy, với $m=\pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị (H). Tìm tất cả các giá trị tham số m để đường thẳng (d): $y=-x+m-1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB nội tiếp trong đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $\frac{x}{x-1}=-x+m-1$

$\Leftrightarrow g(x)=x^2-(m-1).x+m-1=0$ (1) với $x\neq 1$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m-1)^2-4(m-1)>0\\ g(1)=1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>5$ (2).

Với m thỏa mãn (2), gọi x_1,x_2 là các nghiệm của (1), ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m-1\\ x_1.x_2=m-1\\ g(x_1)=g(x_2)=0\end{cases}$

Gọi $A(x_1;-x_1+m-1), B(x_2;-x_2+m-1)$

Ta có $AB^2=2(x_2-x_1)^2=2[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]=2(m^2-6m+5)$

$OA^2=x_1^2+(m-1-x_1)^2=2x_1^2-2(m-1)x_1+(m-1)^2=2g(x_1)+m^2-4m+3$

$=m^2-4m+3$; $OB^2=m^2-4m+3$; $d(O,AB)=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$

Ta có: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AB.d(O;AB)=\frac{\sqrt{m^2-6m+5}.|m-1|}{2}$,

$R=\frac{OA.OB.AB}{4S_{OAB}}=\frac{(m^2-4m+3)\sqrt{2(m^2-6m+5)}}{2.\sqrt{m^2-6m+5}.|m-1|}=2\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow\frac{m^2-4m+3}{|m-1|}=4\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=7$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=\frac{3x+1}{1-x}$ có đồ thị là (C). Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N nằm trên cùng một nhánh của (C) sao cho:

1. M, N đối xứng qua A
2. Khoảng cách từ (d) đến điểm $B(3;-5)$ là lớn nhất, khi đó tính diện tích tam giác BMN.

Lời giải

Đường thẳng đi qua $A\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ có hệ số góc k: $y=k\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{3x+1}{1-x}=k\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2kx^2+(k+5)x+3-3k=0$ (1) (do $x=1$ không thỏa mãn (1)). (C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt M, N ở trên cùng một nhánh của (C)

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $1<x_1<x_2$ hoặc $x_1<x_2<1$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta=(k+5)^2-8k(3-3k)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ 25k^2-14k+25>0\end{cases}\Leftrightarrow k\neq 0.$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\left[\begin{array}{l}1<x_1<x_2\\ x_1<x_2<1\end{array}\right. \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)>0 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \Leftrightarrow \frac{3-3k}{2k}+\frac{k+5}{2k}+1>0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{k}>0 \Leftrightarrow k>0$

Vậy (C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của (C) $\Leftrightarrow k>0$.

1. A,M,N cùng thuộc (d) nên M,N đối xứng qua A khi A là trung điểm M,N $\Leftrightarrow x_1+x_2=2x_A \Leftrightarrow -\frac{k+5}{2k}=-3 \Leftrightarrow k=1$, thỏa mãn điều kiện $k>0$.

Vậy, $k=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Vì (d) luôn qua điểm cố định A nên $d(B,(d))$ lớn nhất khi và chỉ khi (d) vuông góc AB. Hệ số góc của đường thẳng AB là $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1$.

Vì (d) $\perp$ AB $\Leftrightarrow k=1$ nên khi $k=1$ thì $d(B,(d))$ lớn nhất

Khi đó phương trình (1) trở thành phương trình: $2x^2+6x=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-3 \Rightarrow M(-3;-2),\ N(0;1) \Rightarrow MN=3\sqrt{2}$. Lại có $AB=\frac{9}{\sqrt{2}}$

Diện tích tam giác BMN : $S=\frac{1}{2}MN.AB=\frac{1}{2}3\sqrt{2}.\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{27}{2}$.

Ví dụ 6. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+2$ và (d) là đường thẳng đi qua $A(2;0)$, có hệ số góc là m

1. Tìm m để đường thẳng (d) cắt (C) tại ba điểm A, B, C phân biệt, chứng minh rằng khi đó A là trung điểm của BC.

2. Khi (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C, gọi B_1 và C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung độ, tìm m *dương* sao cho diện tích hình thang BB_1C_1C bằng 8.

Lời giải

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$-x^3+6x^2-9x+2=m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x+1+m)=0$

$\Leftrightarrow x=2,\quad g(x)=x^2-4x+1+m=0$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A,B,C $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_g>0\\ g(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3-m>0\\ m\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow m<3$ (*).

Vì x_B, x_C là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$ nên $x_B+x_C=4=2x_A$ và $y_B+y_C=2y_A=0$, suy ra A là trung điểm của BC.

2. Hai nghiệm của $g(x)=0$ là $x=2\pm\sqrt{3-m}$ và B, C thuộc (d) nên $B(2+\sqrt{3-m};m\sqrt{3-m})$, $C(2-\sqrt{3-m};-m\sqrt{3-m})$

Giả thiết cho $m>0$ kết hợp với điều kiện (*) ta có $m\in(0,3)$, khi đó x_B, x_C đều dương.

Diện tích hình thang vuông BB_1C_1C :

$S=\left(\frac{BB_1+CC_1}{2}\right).B_1C_1=\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)|y_B-y_C|=8 \Leftrightarrow 2\left|2m\sqrt{3-m}\right|=8$

$\Leftrightarrow m\sqrt{3-m}=2 \Leftrightarrow m^2(3-m)=4 \Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=2$.

Vì $m\in(0;3)$ nên chỉ nhận $m=2$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị là (C). Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm A(−1;0) với hệ số góc k ($k\in\mathbb{R}$). Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C). Gọi E là tâm đối xứng của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng qua E và cắt (C) tại ba điểm E, A, B phân biệt sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.

4. Cho hàm số $y=-x^3+mx+1$ (1). Tìm m để đồ thị (Cm) của hàm số (1) cắt đường thẳng (d) $y=2x+1$ tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó A là điểm có hoành độ $x=0$ và thỏa mãn điều kiện tam giác OBC vuông tại O.

5. Cho hàm số $y=\frac{1+x}{1-2x}$ có đồ thị là (C). Tìm tham số m để đường thẳng d_m: $y=x+2m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B cùng điểm I tạo thành tam giác có diện tích bằng 1, với $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

6. Giả sử A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y=2x-2m$ và đồ thị $(C): y=\frac{2x-m}{mx+1}$. Tìm m để đường thẳng d cắt 2 trục tọa độ tại M, N sao cho $S_{OAB}=3S_{OMN}$.

7. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$, có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $y=mx+m$ luôn cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 1, với O là gốc tọa độ. A là điểm có hoành độ bằng −1.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

8. Cho hàm số $y=\frac{2x-5}{x-2}$, có đồ thị là (C). Từ 2 điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$ hãy lập phương trình đường thẳng có hệ số góc bằng 1,5 đi qua 2 điểm đó. Tính diện tích hình thang giới hạn bởi AB, 2 đường thẳng này và trục Ox.

Bài 2:

1. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm các giá trị *m* để đường thẳng $y=-3x+m$ cắt (C) tại A và B sao cho trọng tâm của tam giác OAB thuộc đường thẳng $d: x-2y-2=0$ (O là gốc tọa độ).

2. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm các giá trị của *m* sao cho đường thẳng (*d*): $y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác IMN bằng 4 với I(1; 2).

3. Giả sử (d) là đường thẳng đi qua $A(0;1)$ và có hệ số góc m. Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C): $y=\frac{x-3}{x-2}$ của hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho:

a. $AB=\sqrt{10}$.

b. $G\left(\frac{2}{3};4\right)$ là trọng tâm tam giác OAB.

4. Tìm các giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ sao cho: $(d): y=x+4$ cắt đồ thị $(C_m): y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng 4 (đvdt), biết $K(1;3)$.

5. Tìm hai tọa độ P và Q thuộc đồ thị (C): $y=(x^2-1)^2$ sao cho đường thẳng PQ song song với trục hoành và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến đường thẳng PQ bằng 8.

Bài 3:

1. Xác định đường thẳng d sao cho d cắt $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B, C sao cho tam giác ABC đều, với $A(-2;5)$.

2. Đường thẳng $y=x$ cắt (C): $y=\frac{3x+2}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm C, D phân biệt sao cho ABCD là hình bình hành.

3. Cho hàm số $y=\frac{-x+m}{x+2}$, tìm các giá trị của *m* để đường thẳng $2x+2y-1=0$ cắt đồ thị của hàm số tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

4. Tìm tham số m để đường thẳng $y=mx-m$ cắt đồ thị $y=\frac{x^2-2x-1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác ABC vuông tại $C(1;\sqrt{2})$.

Bài 4: Cho hàm số $y=\frac{mx+2}{x-1}$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để trên đồ thị (C_m) có 2 điểm P, Q cách đều 2 điểm $A(-3;4)$, $B(3;-2)$ và diện tích tứ giác APBQ bằng 24.

Bài 5. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x-2}{x+2}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng (d): $y=\frac{3}{2}x+m$.

Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho:

1. $MN=2\sqrt{39}$

2. Tam giác AMN vuông tại A với $A(-4;0)$.

Bài 6.

1. Viết phương trình 2 đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ O cắt đồ thị (C) $y=\frac{2}{x}$ tại 4 điểm phân biệt là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{32}{3}$.

2. Cho hàm số $y=\frac{2x+4}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Viết phương trình của hai đường thẳng đi qua I và cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là bốn đỉnh của một hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{32}{3}$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}-x^2+3x+4$ (1)

1. Tìm tham số a để phương trình $|x^3|+3x^2-9|x|+a=0$ (2) có đúng hai nghiệm

2. Cho điểm $I\left(-\frac{3}{2},4+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ và gọi (d) là đường thẳng $y=mx+4$, m là tham số thực. Tìm tham số m để (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A(0;4), B, C sao cho $IB^2+IC^2=4S_{IBC}$ (S_{IBC} là diện tích tam giác IBC)

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm các điểm thuộc (C) cách đều hai trục tọa độ.

2. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Viết phương trình của hai đường thẳng đi qua I, có hệ số góc là số nguyên và cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

Bài 9: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng (d): $y=x+m$, m là tham số. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho:

1. M, N cách đều trục hoành độ.

2. Diện tích tam giác IMN = 4 với I(1;2).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 10: Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm a,b để đường thẳng $\Delta: y=ax+2b-4$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho M, N đối xứng nhau qua O.

2. Đường thẳng $y=x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại C, D sao cho ABCD là hình bình hành.

Bài 11:

1. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+9}{x-2}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y=2x+m$. Tìm m sao cho (C) cắt d tại A, B phân biệt thỏa mãn $I\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

2. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D lần lượt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$ sao cho tam giác ACK có diện tích bằng 4, biết $K(3;-2)$.

3. Xác định đường thẳng d sao cho d cắt $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B, C sao cho tam giác ABC đều, với $A(-2;5)$.

4. Tìm m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị $(C): y=\frac{2x-4}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt B và C sao cho tứ giác OABC là hình bình hành (O là gốc toạ độ, $A(-5;5)$)

Dạng 3: ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ TẠI 2, 3 ĐIỂM MÀ TIẾP TUYẾN TẠI ĐÓ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Xác định m để đường thẳng d: $y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+1}{x-1}=2x+m$

$\Leftrightarrow g(x)=2x^2+(m-3)x-m-1=0$ (1), $x\neq 1$

Ta có: $\begin{cases}\Delta=(m-3)^2+8(m+1)=(m+1)^2+16>0,\forall m\in\mathbb{R}\\ g(1)=-2\neq 0\end{cases}$, do đó phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Vậy d luôn luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B.

Gọi $x_1,x_2\ (x_1\neq x_2)$ lần lượt là hoành độ của A và B thì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có: $x_1+x_2=\frac{1}{2}(3-m)$. Tiếp tuyến Δ_1,Δ_2 tại A, B có hệ số góc lần lượt là:

$k_1=y'(x_1)=-\frac{2}{(x_1-1)^2}, k_2=y'(x_2)=-\frac{2}{(x_2-1)^2}$.

$\Delta_1//\Delta_2\Leftrightarrow k_1=k_2\Leftrightarrow -\frac{2}{(x_1-1)^2}=-\frac{2}{(x_2-1)^2}\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1-1=x_2-1\\ x_1-1=-x_2+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2\\ x_1+x_2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{2}(3-m)=2\Leftrightarrow m=-1$$

Vậy, $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-(m+1)x^2-m$, m là tham số, (d) là tiếp tuyến của (Cm) tại điểm A có hoành độ $x=1$. Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm A, B, C sao cho BC = 4..

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến (d):

$y=y'(1)(x-1)+y(1)=(-1-2m)(x-1)-2m-\frac{3}{4}=-(2m+1)x+\frac{1}{4}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và (d):

$\frac{1}{4}x^4-(m+1)x^2-m=-(2m+1)x+\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^4-4(m+1)x^2+4(2m+1)x-4m-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x-4m-1)=0\Leftrightarrow x=1,\quad g(x)=x^2+2x-4m-1=0$ (1)

(d) cắt (Cm) tại ba điểm A, B, C $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+4m+1>0\\ 2-4m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\frac{1}{2}\\ m\neq\frac{1}{2}\end{cases}$ (*)

Hoành độ của B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1), lại có B, C thuộc (d), suy ra $B\left(x_1;-(2m+1)x_1+\frac{1}{4}\right), C\left(x_2;-(2m+1)x_2+\frac{1}{4}\right)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$BC^2=(x_2-x_1)^2+(2m+1)^2(x_2-x_1)^2=[(2m+1)^2+1](x_2-x_1)^2$

$=(4m^2+4m+2)[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]$. Vì $x_1+x_2=-2$, $x_1x_2=-4m-1$

Do đó $BC=4\Leftrightarrow BC^2=(4m^2+4m+2)[4+4(4m+1)]=16$

$\Leftrightarrow(4m^2+4m+2)(16m+8)=16\Leftrightarrow 64m^3+96m^2+64m+16=16$

$\Leftrightarrow m(2m^2+3m+2)=0\Leftrightarrow m=0.$

So điều kiện (*) nhận $m=0$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$, tìm các giá trị của tham số m để đường thẳ
$d: y=m(x-2)-2$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A(2; –2), B, D sao cho tích các
số góc của tiếp tuyến tại B và D với đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $x^3-3x^2+2=m(x-2)-2$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $g(x)=x^2-x-2-m=0$ (1)

(C) cắt d tại 3 điểm phân biệt A(2; –2), B, D $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2, t

là phải có: $\begin{cases}\Delta=9+4m>0\\ g(2)=-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}<m\neq 0$ (2)

Với điều kiện (2), gọi x_1,x_2 là các nghiệm của (1) thì $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=-2-m$.

Ta có: $k=y'(x_1).y'(x_2)=(3x_1^2-6x_1)(3x_2^2-6x_2)=9(m+1)^2-9\geq -9$ với $-\dfrac{9}{4}<m\neq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=-1$, khi đó $k_{min}=-9$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+x+2m+1$, với m là tham số thực, có đồ
là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=x+m+1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân b
A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 12.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-(m+1)x^2+x+2m+1=x+m+1$

$\Leftrightarrow x^3-(m+1)x^2+m=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-mx-m)=0$ (1) $\Leftrightarrow x=1$ hoặc

$x^2-mx-m=0$ (2)

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân b

khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+4m>0\\ 1^2-m.1-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m>0\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (*)

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2).

Tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C là: $y'(1)+y'(x_1)+y'(x_2)=12$

$\Leftrightarrow 4-2m+3(x_1^2+x_2^2)-2(m+1)(x_1+x_2)=12$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-2(m+1)(x_1+x_2)=8+2m$ (3)

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=-m$, thay vào (3) ta được $m^2+2m-8=0$.

Giải ra ta được $m=-4$ (loại) hoặc $m=2$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y=x+m$ luôn cắt đồ thị
$(C): y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của
các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

Đề thi Đại học Khối A – năm 2011.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow g(x)=2x^2+2mx-m-1=0\,(*), x\neq\dfrac{1}{2}$

Vì $\begin{cases}\Delta'=m^2+2m+2>0,\forall m\in\mathbb{R}\\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq 0,\forall m\in\mathbb{R}\end{cases}$ nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt

với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy đường thẳng $y=x+m$ luôn cắt đồ thị $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của (*) thì $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Tiếp tuyến của (C) tại A, B lần lượt có hệ số góc là

$k_1=y'(x_1)=-\dfrac{1}{(2x_1-1)^2}, k_2=y'(x_2)=-\dfrac{1}{(2x_2-1)^2}$

Cách 1: $k_1+k_2=\dfrac{-(2x_1-1)^2-(2x_2-1)^2}{(2x_1-1)^2(2x_2-1)^2}=\dfrac{-\left[4(x_1+x_2)^2-8x_1x_2-4(x_1+x_2)+2\right]}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$

Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\ x_1.x_2=\dfrac{-m-1}{2}\end{cases}$

Khi đó $k_1+k_2=-4(m+1)^2-2\leq -2$

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng –2 khi $m=-1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Cách 2:

$k_1+k_2=-\left[\frac{1}{(2x_1-1)^2}+\frac{1}{(2x_2-1)^2}\right]\le-\frac{2}{|(2x_1-1)(2x_2-1)|}$

$(2x_1-1)(2x_2-1)=4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=-2(m+1)+2m+1=-1$

Nên $k_1+k_2\le-2\Rightarrow k_1+k_2$ lớn nhất bằng -2. Đẳng thức xảy ra khi

$2x_1-1=1-2x_2\Leftrightarrow x_1+x_2=1\Leftrightarrow m=-1$

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x-2}$, có đồ thị (C). Tìm tất cả các tham số thực m để đường thẳng $(t): y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

2. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}$ có tiếp tuyến tại M thuộc (C) có hoành độ m cắt (C) tại 2 điểm phân biệt E, F khác M sao cho $MF=3ME$, E nằm giữa M và F.

Bài 2:

1. Cho hàm số: $y=x^3+mx^2+1$ có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để đường thẳng d: $y=-x+1$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại B, C vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số: $y=x^3+3x^2+mx+1$ có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để đường thẳng d: $y=1$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến tại B,C có tổng hệ số góc không nhỏ hơn 17.

Bài 3: Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=x^3-5x^2+(m+4)x-m$, m là tham số.

1. Tìm tham số m để trên (Cm) tồn tại ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+3$.

2. Tìm m để (Cm) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt A(1;0), B, C. Khi đó gọi k_1, k_2 là hai tiếp tuyến của (Cm) tại B và C. Tìm m để $k_1^2+k_2^2=160$

3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-4)x+m$, tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $k_A+\frac{1}{k_B}+\frac{1}{k_C}=0$, trong đó k_A, k_B, k_C lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại A, B, C.

Bài 4: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{x-1}$

1. Tìm a,b để đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0;-1)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại A có hệ số góc bằng -3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với a,b vừa tìm được.

2. Cho đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm $B(-2;2)$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2. Các đường thẳng đi qua M_1, M_2 song song với các trục toạ độ tạo thành hình chữ nhật. Tính các cạnh của hình chữ nhật đó theo $m\in\mathbb{R}$, khi nào hình chữ nhật này trở thành hình vuông.

Dạng 4: TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ ĐỒNG THỜI ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Ví dụ

Ví dụ: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C), tìm điều kiện của a và b để đường thẳng (d): $y=ax+b$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, D sao cho AB = BD. Khi đó chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3-3x^2+1=ax+b$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-ax+1-b=0$ (*).

Giả sử (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, D có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ là nghiệm của phương trình (*)

Khi đó: $2x^3-3x^2-ax+1-b=2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=2x^3-2(x_1+x_2+x_3)x^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-2x_1x_2x_3\Rightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$ (1)

Ta có: $AB=BD\Rightarrow x_1+x_3=2x_2$ (2). Thế (2) vào (1) ta có: $x_2=\frac{1}{2}$.

Thay $x_2=\frac{1}{2}$ vào phương trình (*), ta được $a+2b=1\Leftrightarrow b=\frac{1-a}{2}$

Thay $b=\frac{1-a}{2}$ vào phương trình (*), nên có $2x^3-3x^2-ax+\frac{1}{2}(a+1)=0$

$\Leftrightarrow(2x-1)(2x^2-2x-a-1)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $g(x)=2x^2-2x-a-1$ (**)

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, D

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 2a + 3 > 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = -a - \frac{3}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > -\frac{3}{2}$

Vậy: $b = \frac{1-a}{2}, a > -\frac{3}{2}$ thỏa yêu cầu.

Khi đó: $(d): y = ax + \frac{1-a}{2} \Leftrightarrow (2x-1)a + 1 - 2y = 0$, phương trình này nghiệm đúng với mọi $a > -\frac{3}{2}$, tức phải có: $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 1 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Điểm cố định $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 1$ cắt đồ thị (C): $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB.

2. Chứng minh rằng với mọi $m \in (-1;1)$ đồ thị (C_m): $y = \frac{mx + 1}{x + m}$ luôn cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 12$ tại bốn điểm phân biệt.

Bài 2:

1. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và (d) là đường thẳng đi qua điểm A(3; 4) có hệ số góc là m. Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N. Khi đó tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

2. Tìm m để (d): $y = m(x-1) + 2$ cắt (C): $y = \frac{2-x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N ở trên hai nhánh của (C). Khi đó tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

3. Cho hai đồ thị $(C_1): y = x^3 + 2x^2 + 1, (C_2): y = x^3 + x^2 - mx + 2$, m là tham số thực. Tìm m để (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó chứng minh trung điểm của đoạn AB thuộc đồ thị hàm số $y = 4x^3 + 4x^2 + 3x + 3$ và viết phương trình đường thẳng AB.

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

Dạng 1: *Tìm các điểm đối xứng nhau trên đồ thị*

Bài toán: *Cho đồ thị* $(C): y = f(x)$, *tìm trên đồ thị những cặp điểm* M, N *đối xứng nhau qua điểm* A *hoặc đường thẳng* $d: ax + by + c = 0$ *(cho sẵn)*

Cách giải:

- Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$ (1)

- Tìm tọa độ điểm N theo x_0, y_0 sao cho N là điểm đối xứng của M qua A (hoặc qua d). Nên ta có: $y_N = f(x_N)$ (2)

- Từ (1) và (2) ta tìm được tọa độ của điểm M, N.

Bài toán. *Cho hàm số* $(C): y = f(x)$. *Tìm các cặp điểm trên* (C) *đối xứng với nhau qua điểm* $I(x_I; y_I)$.

Cách giải:

Gọi cặp điểm cần tìm là $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$, thế thì ta có:

- M và N đối xứng qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của đoạn MN.
- M và N thuộc (C) nên tọa độ của chúng nghiệm đúng phương trình y = f(x).

Do đó tọa độ của M, N là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \\ x_1 + x_2 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = 2y_I \end{cases}$$

. Giải hệ này sẽ tìm được tọa độ M, N.

Đặc biệt: Nếu M, N là hai điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O, khi đó nếu $M(x_0; y_0)$ thì $N(-x_0; -y_0)$. Suy ra $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ -y_0 = f(-x_0) \end{cases}$$

Giải hệ tìm được tọa độ M, N.

Công thức tọa độ của phép đối xứng tâm.

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm I(a; b). Gọi S_I là phép đối xứng tâm I.

Ta có $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua S_I khi và chỉ khi $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$

Đường $(C): y = f(x)$ có ảnh qua đối xứng tâm S_I là

$(C): 2b - y = f(2a - x) \Leftrightarrow y = -f(2a - x) + 2b$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$.

Lời giải

1. Gọi $A(x_0;y_0)$, B là điểm đối xứng với A qua điểm $M(-1;3)\Rightarrow B(-2-x_0;6-y_0)$

$$A,B\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-x_0^3+3x_0+2\\6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2\Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\to y_0=2\\x_0=-2\to y_0=4\end{array}\right.$$

Vậy 2 cặp điểm cần tìm là: $A_1(0;2)$ và $B_1(-2;4)$

$A_2(-2;4)$ và $B_2(0;2)$

2. $\overrightarrow{MN}=(2;-1)\Rightarrow$ phương trình $MN:x+2y+3=0$.

Phương trình đường thẳng $(d)\perp MN$ có dạng: $y=2x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2x-4}{x+1}=2x+m\Leftrightarrow 2x^2+mx+m+4=0\ (x\neq-1)\quad(1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,B\Leftrightarrow\ \Delta=m^2-8m-32>0\quad(2)$

Khi đó $A(x_1;2x_1+m)$, $B(x_2;2x_2+m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)\equiv I\left(-\dfrac{m}{4};\dfrac{m}{2}\right)$ (theo định lý Vi-ét)

A, B đối xứng nhau qua MN $\Leftrightarrow I\in MN\Leftrightarrow m=-4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow x=0,x=2\Rightarrow A(0;-4)$, $B(2;0)$ $\to$ 2 điểm cần tìm là: $(0;-4)$ và $(2;0)$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^3+mx^2+9x+4$. Xác định m để trên đồ thị hàm số có một cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

Lời giải

Giả sử $M(x_0;y_0)$, $N(-x_0;-y_0)$ $x_0\neq0$ là cặp điểm đối xứng nhau qua O, nên ta có:

$$\begin{cases}y_0=x_0^3+mx_0^2+9x_0+4\quad(1)\\-y_0=-x_0^3+mx_0^2-9x_0+4\quad(2)\end{cases}$$

Lấy (1) cộng với (2) vế với vế, ta có: $mx_0^2+4=0\quad(3)$

Để (3) có nghiệm khi và chỉ khi $m<0$.

Vậy, với $m<0$ thì trên đồ thị hàm số có một cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O có hoành độ $x_0=\sqrt{-\dfrac{4}{m}}$ hoặc $x_0=-\sqrt{-\dfrac{4}{m}}$

Ví dụ 3:

1. Tìm trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x-3}{x+2}$ hai điểm M, N đối xứng nhau qua $I(1;-2)$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$ có đồ thị (C). Tìm trên đồ thị hai điểm A, B sao cho A và B đối xứng nhau qua điểm $M(1;-2)$.

Lời giải

1. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm I.

Ta có phương trình của (C') là: $2\times(-2)-y=\dfrac{(2\times1-x)-3}{(2\times1-x)+2}\Leftrightarrow y=\dfrac{-5x+15}{x-4}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C') và (C) là

$$\frac{x-3}{x+2}=\frac{-5x+15}{x-4}\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Hai điểm M, N cần tìm là $M(-1;-4)$ và $N(3;0)$ và ngược lại.

2. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$

Cách 1:

Gọi tọa độ hai điểm thuộc đồ thị cần tìm là $A\left(a;\dfrac{2a-1}{a+3}\right)$, $B\left(b;\dfrac{2b-1}{b+3}\right)$ $(a,b\neq-3)$

Vì A, B đối xứng nhau qua $M(1;-2)$ nên M là trung điểm của AB do đó

$$\begin{cases}a+b=2.1\\\dfrac{2a-1}{a+3}+\dfrac{2b-1}{b+3}=2.(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\\dfrac{2a-1}{a+3}+\dfrac{2b-1}{b+3}=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ab=-8\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\Rightarrow b=-2\\a=-2\Rightarrow b=4\end{array}\right.$$

Vậy các điểm cần tìm là $A(4;1)$, $B(-2;-5)$ hoặc $A(-2;-5)$, $B(4;1)$

Cách 2: Gọi $A\left(a;\dfrac{2a-1}{a+3}\right)$ Phép đối xứng tâm $M(1;-2)$ biến A thành điểm B có tọa độ thỏa mãn: $\begin{cases}x_B=2x_M-x_A\\y_B=2y_M-y_A\end{cases}$ nên $B\left(2-a;-4-\dfrac{2a-1}{a+3}\right)$

Mà $B\in(C)\Rightarrow -4-\dfrac{2a-1}{a+3}=\dfrac{2(2-a)-1}{2-a+3}\Leftrightarrow a^2-2a-8=0\Leftrightarrow a=-2$ hoặc $a=4$

Vậy, các điểm cần tìm là $A(4;1)$, $B(-2;-5)$ hoặc $A(-2;-5)$, $B(4;1)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ví dụ 4. Tìm m để (Cm): $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x^2+2mx+1$ có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $9x-6y-7=0$.

Lời giải

$y'=x^2-(m+2)x+2m \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=m$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 2$

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$A\left(2;\ 2m-\frac{1}{3}\right),\ B\left(m;-\frac{m^3}{6}+m^2+1\right).$$

A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng (d) $\Leftrightarrow AB\perp(d)$ và trung điểm I của đoạn AB thuộc (d). Một vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{a}=(2;3)$.

$$\overrightarrow{AB}=\left(m-2;-\frac{m^3}{6}+m^2-2m+\frac{4}{3}\right)$$

AB vuông góc với (d) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow 2m-4-\frac{m^3}{2}+3m^2-6m+4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{m^3}{2}-3m^2+4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m^2-6m+8=0\end{array}\right. \Leftrightarrow m=0 \vee m=4 \vee m=2 \text{ (loại)}.$$

Với $m=0$ thì $A\left(2;-\frac{1}{3}\right)$, $B(0;1)$ suy ra trung điểm của AB là $I\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Thay tọa độ I vào phương trình của (d), ta được $0=0$, suy ra $I\in(d)$. Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Với $m=4$ thì $A\left(2;\frac{23}{3}\right)$, $B\left(4;\frac{19}{3}\right)$ suy ra $I(3;7)$.

Thay tọa độ I vào phương trình (d) ta được $27-42-7=0$ (sai) $\Rightarrow I\notin(d)$. Vậy $m=4$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy, $m=0$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$, có đồ thị là (C). Gọi A, B là 2 giao điểm của đường thẳng Δ: $y=\frac{1}{6}x$ với đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất sao cho MA + MB có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y=\frac{1}{6}x\\ y=\frac{x-1}{x+1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A\left(2;\frac{1}{3}\right)\\ B\left(3;\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

A, B nằm về cùng phía đối với đường phân giác d: $x-y=0$. Gọi $A'(a;b)$ là điểm đối xứng của A qua d nên có:

$$\begin{cases}(a-2).1+\left(b-\frac{1}{3}\right).1=0\\ \frac{a+2}{2}-\frac{b+\frac{1}{3}}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=2\end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{1}{3};2\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'B}=\frac{1}{6}(16;-9).$$

Phương trình tham số của A'B là: $\begin{cases}x=3+16t\\ y=\frac{1}{2}-9t\end{cases}(t\in R)$.

Khi đó M là giao điểm của A'B và d.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y=0\\ x=3+16t\\ y=\frac{1}{2}-9t\end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$. Vậy $M\left(\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$ là tọa độ cần tìm

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị (C). Tìm trên đồ thị hai điểm A, B sao cho A, B đối xứng nhau qua $(\Delta): y=2x+2$

Lời giải

Vì A, B cùng thuộc đồ thị (C) nên $A\left(a;-a^3+3a+2\right)$, $B\left(b;-b^3+3b+2\right)$ $(a\neq b)$

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I\left(\frac{a+b}{2};\frac{-a^3+3a+2-b^3+3b+2}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(b-a)\left(1;3-a^2-ab-b^2\right)$

Do A, B đối xứng nhau qua $(\Delta): y=2x+2$ nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_\Delta=0\\ I\in\Delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+ab+b^2=\frac{7}{2}\\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2-1\right)=0\end{cases}$$

Với $\begin{cases}a^2+ab+b^2=\frac{7}{2}\\ a+b=0\end{cases} \Rightarrow a=-b=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

Với $\begin{cases}a^2+ab+b^2=\frac{7}{2}\\ a^2-ab+b^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=\frac{9}{4}\\ ab=\frac{5}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}\\ ab=\frac{5}{4}\end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vì $\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{19}}{2} < 4.\frac{5}{4} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Vậy tọa độ cần tìm là $A\left(-\frac{\sqrt{14}}{2};2+\frac{\sqrt{14}}{4}\right), B\left(-\frac{\sqrt{14}}{2};2-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ và ngược lại.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị hai điểm A, B sao cho A, B song song với trục hoành và $AB = 3$.

Lời giải

Vì AB song song với trục hoành nên $\overrightarrow{AB} = k\vec{i} = k(1;0)$ là véc tơ chỉ phương đơn vị của trục hoành.

Do $AB = 3$ nên $|k| = 3 \Leftrightarrow k = \pm 3$

Với $k = -3 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -3\vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 3\vec{i}$ vì vậy chúng ta sẽ không quan tâm tới thứ tự A, B nên chỉ cần xét $\overrightarrow{AB} = (3;0)$

Vì $\overrightarrow{AB} = (3;0)$ nên B là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (3;0)$ do đó tọa độ điểm B là giao điểm của đồ thị (C) và đồ thị (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

Phương trình (C') qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là

$$y = (x-3)^3 - 3(x-3) + 3 = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x^3 - 3x + 3 \\ y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$

Với $B(1;1)$ thì từ $\overrightarrow{AB} = (3;0) \Rightarrow A(-2;1)$

Với $B(2;5)$ thì từ $\overrightarrow{AB} = (3;0) \Rightarrow A(-1;5)$

Vậy, các cặp điểm cần tìm $A(-2;1)$, $B(1;1)$ và $A(-1;5)$, $B(2;5)$ hoặc ngược lại.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2$ có đồ thị là (C). Gọi B $(x_B > 1)$, D là giao điểm của (C) và đường thẳng $d: 4x + 3y - 16 = 0$. Xác định tọa độ trọng tâm G của ΔABC. Biết A thuộc trục hoành, ΔABC vuông tại A, $C \in d$ và đường tròn nội tiếp ΔABC có bán kính bằng 1.

Lời giải

Tọa độ giao điểm B, D là nghiệm phương trình: $-\frac{4}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2 = \frac{16-4x}{3}$

$\Leftrightarrow -x^2(x-4) = 4 - x \Leftrightarrow (1-x^2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = \pm 1$ vì $(x_B > 1)$

$\Rightarrow B(4;0), D\left(-1;\frac{20}{3}\right)$ hoặc $D(1;4)$

Cách 1: $d: y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$. Nhận thấy, d tạo với Ox một góc α mà

$\tan\alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \tan\widehat{ABC} = \frac{4}{3}$ hay $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}a$ với $AB = a > 0$

Do $r = 1$ nên $p = S \Leftrightarrow a + \frac{4}{3}a + \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = a\frac{4}{3}a \Leftrightarrow a(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3$

Với $a = 3 \Rightarrow A(1;0)$ hoặc $A(7;0)$.

$A(1;0), C(1;4) \Rightarrow G\left(2;\frac{4}{3}\right)$, trường hợp này $C \equiv D$ hay C thuộc đồ thị (C)

$A(7;0), C(7;-4) \Rightarrow G\left(6;-\frac{4}{3}\right)$. Do bài toán không yêu cầu $C \neq D$ nên cả 2 trường hợp đều thỏa mãn.

Cách 2:

Vì $A \in Ox \Rightarrow A(a;0)$ và $C \in d \Rightarrow C\left(a;\frac{16-4a}{3}\right)$ nên $AB = |a-4|$,

$AC = \left|\frac{16-4a}{3}\right|, BC = \frac{5}{3}|a-4|$ $p = \frac{AB+BC+CA}{2}$ là nửa chu vi.

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}|a-4|\left|\frac{16-4a}{3}\right|$

Với $S_{ABC} = pr \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a-4|\left|\frac{16-4a}{3}\right| = \frac{1}{2}\left(|a-4| + \left|\frac{16-4a}{3}\right| + \frac{5}{3}|a-4|\right)$ do $r = 1$

$\Leftrightarrow |a-4| = 3 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = 7$

- Với $a = 1 \Rightarrow A(1;0), C(1;4) \Rightarrow G\left(2;\frac{4}{3}\right)$
- Với $a = 7 \Rightarrow A(7;0), C(7;-4) \Rightarrow G\left(6;-\frac{4}{3}\right)$

Vậy, $G\left(2;\frac{4}{3}\right)$ hoặc $G\left(6;-\frac{4}{3}\right)$ là tọa độ cần tìm

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y = \frac{x^2+x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $I\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+x^2+3x-1$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $E\left(-\frac{1}{2};-\frac{7}{6}\right)$.

3. Cho hàm số $y=\frac{3-2x}{x}$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $E(-1;-1)$.

4. Cho hàm số $y=x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $I(2;18)$.

5. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+3x+2}{2x+1}$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Bài 2:

1. Cho hàm số $y=\frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x-1$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $(d'): y=x+3$.

3. Cho hàm số $y=\frac{x^2+(m-2)x+m+1}{x+1}$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) có hai điểm nằm trên đường thẳng (d) $5x-y+3=0$, đồng thời chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $(d'): x+5y+9=0$.

4. Cho hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm những cặp điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: 16x+17y+33=0$.

5. Cho hàm số $y=x^3-3x+4$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $x=\frac{3}{2}$.

6. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $x-3y+8=0$.

7. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x+4}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Bài 3:

1. Cho hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}mx^2+\frac{1}{2}m^3$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx+2m-3}{x+2}$ có đồ thị (C_m). Chứng minh rằng hàm số luôn có cực đại, cực tiểu với mọi m. Tìm m để hai điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+2y+8=0$.

Bài 4:

1. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C). Trên đồ thị (C) có bao nhiêu bộ bốn điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $I(1;-1)$.

2. Trên mp(Oxy) cho đồ thị $(C): y=x^3-2\sqrt{2}x$. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành có tất cả các đỉnh đều nằm trên (C) thì tâm của hình bình hành đó là gốc tọa độ O.

Bài 5:

1. Chứng minh rằng với các điểm A, B, C phân biệt thuộc đồ thị $(C): y=-\frac{2}{x}$ thì tam giác ABC cũng có trực tâm H thuộc đồ thị (C).

2. Chứng minh A, B, C thuộc $(C): y=\frac{x+1}{x-2}$ thì trực tâm H của tam giác ABC cũng thuộc (C).

Bài 6:

1. Cho hàm số $y=2x^2-3x+1$ có đồ thị là (P) và đường thẳng $(\Delta): y=x-5$. Tìm các điểm $M\in(P), N\in(\Delta)$ sao cho MN nhỏ nhất.

2. Tìm các điểm M trên đồ thị (C): $y=x^4+2x^2-1$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM, với $I\left(0;\frac{17}{8}\right)$.

3. Tìm trên đồ thị (C): $y=x^3-3x^2+1$, 2 điểm M, N sao cho $MN=4\sqrt{2}$ và tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Bài 7:

1. Tìm tọa độ 2 điểm B, C thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị $y=\frac{2}{x}$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại $A(1;-2)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Tìm các điểm thuộc 2 nhánh khác nhau của (C): $y=\frac{2x+1}{x+1}$ sao cho khoảng cách giữa 2 điểm đó ngắn nhất.

Bài 8: Tìm tọa độ 2 điểm B, D sao cho ABCD là hình vuông, biết rằng D là điểm nằm trên đường thẳng $d: x+y-2=0$; $I(1;9)$ là trung điểm AC; A và C là 2 điểm nằm trên đồ thị $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x+\frac{7}{2}$.

Bài 9:

1. Cho hàm số $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) những điểm M có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất.

2. Tìm trên đồ thị (C): $y=-x^3+3x$ có bao nhiêu bộ bốn điểm A,B,C,D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $O(0;0)$.

Bài 10: Trên đồ thị (C): $y=\frac{2x-1}{x+2}$ lấy điểm A có hoành độ bằng -3. Tìm tọa độ điểm B thuộc (C) sao cho tam giác OAB vuông tại A (O là gốc tọa độ).

Bài 11: Cho hàm số $y=\frac{1-2x}{1+x}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho A và B đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $8x-4y-21=0$.

Bài 12:

1. Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là (P) và điểm $A(-1;1), B(3;9)$ thuộc (P). Tìm điểm M trên cung AB sao cho diện tích ΔAMB lớn nhất.

2. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ M:

a. Đến đường thẳng (d): $2x+y-2=0$ bằng $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

b. Đến Oy gấp đôi khoảng cách từ M đến Ox.

Bài 13:

1. Tìm tọa độ 2 điểm B, C thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị $y=\frac{3x-1}{x-1}$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại $A(2;1)$.

2. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm hai điểm B,C thuộc hai nhánh của (C) sao cho tam giác ABC vuông cân tại $A(2;0)$.

3. Với $O(0;0)$ và $A(2;2)$ là 2 điểm thuộc đồ thị $y=x^3-3x$, tìm điểm M nằm trên cung OA của đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ M đến OA lớn nhất.

4. Tìm điểm M thuộc đường thẳng $y=3x-2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3x^2+2$ là nhỏ nhất.

5. Tìm điểm M thuộc đồ thị $y=x^4+2x^2-4$ sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất, với $A(0;-16)$, $B(-1;-8)$.

6. Tìm điểm M thuộc đồ thị $y=-x^3+3x^2-3x+4$ sao cho khoảng cách từ điểm đó đến điểm $A(-3;3)$ nhỏ nhất.

Bài 14: Cho hàm số $y=x^3-5x^2+10x-8$, có đồ thị (C).

1. Gọi A là điểm thuộc (C), C là điểm thuộc đường thẳng $d: x-7y+25=0$ và $I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ là trung điểm AC. Tìm tọa độ điểm B có hoành độ âm sao cho tam giác OAB vuông cân tại A.

2. Gọi E,F theo thứ tự là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác OABC với trục hoành, trục tung (E,F khác O). Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn sao cho tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

Bài 15: Tìm trên đồ thị (C): $y=\frac{5}{3}x^3-\frac{41}{12}x$ có bao nhiêu bộ 4 điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm O.

Bài 16: Tìm tất cả các điểm trên (C) có tọa độ là các số nguyên.

1. $y=\frac{3(x+1)}{x-2}$ 2. $y=\frac{3x^2+5x+14}{6x+1}$

Bài 17:

1. Cho hàm số $y=\frac{x^2-3x+6}{x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) tất cả các cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm những cặp điểm trên đồ thị (C) đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $16x+17y+33=0$.

Dạng 2: *Điểm cố định thuộc đường cong, điểm mà họ đường cong không đi qua.*

Phương pháp

Ta thường gặp bài toán sau

Bài toán: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị $(C): y=f(x)$, biết M thỏa mãn tính chất T cho trước

http://sachxua.edu.vn

Phương pháp: $M \in (C) \Rightarrow M(m;f(m))$.

Dựa vào tính chất T của M ta tìm được m.

1. Điểm cố định của họ đường cong

Điểm $A(x_0;y_0)$ gọi là điểm cố định của họ đường cong $(C_m): y=F(x,m)$

nếu $F(x_0,m)=y_0\quad \forall m$ (1)

Để giải quyết (1) ta thường biến đổi (1) về dạng

$f(x_0,y_0).m^2+g(x_0,y_0).m+h(x_0,y_0)=0\quad \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=h(x_0,y_0)=0$

Từ đó ta tìm được A

2. Điểm mà họ đường cong không đi qua

Điểm $A(x_0;y_0)$ gọi là điểm không có đường cong nào của họ đường cong $(C_m): y=F(x,m)$ đi qua nếu $F(x_0,m)\neq y_0\quad \forall m\in\mathbb{R}$

Hay phương trình $F(x_0,m)=y_0$ vô nghiệm với mọi m

Chú ý: Phương trình $ax+b=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=(m+2)x^3-3(m-2)x+m+7$ có đồ thị là (C_m). Chứng minh rằng họ đường cong (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định và ba điểm này nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ đường cong (C_m)

$\Rightarrow y_0=(m+2)x_0^3-3(m-2)x_0+m+7\quad \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m(x_0^3-3x_0+1)+2x_0^3+6x_0+7-y_0=0\quad \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^3-3x_0+1=0\\ y_0=2x_0^3+6x_0+7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0^3-3x_0+1=0\\ y_0=2(3x_0-1)+6x_0+7=12x_0+5\end{cases}$

Vì phương trình $x^3-3x+1=0$ luôn có ba nghiệm phân biệt nên ta suy ra họ đường cong (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định.

Từ phương trình $y_0=12x_0+5 \Rightarrow$ ba điểm cố định này nằm trên đường thẳng $y=12x+5$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng họ (C_m): $y=\dfrac{(m+1)x+m}{x+m}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Lời giải

Cách 1: Giả sử (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y=ax+b$.

www.facebook.com/daykem.quynhon

Khi đó hệ phương trình sau có nghiệm với mọi m:

$$\begin{cases}\dfrac{(m+1)x+m}{x+m}=ax+b\\ \dfrac{m^2}{(x+m)^2}=a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+1-\dfrac{m^2}{x+m}=a(x+m)-am+b\\ \dfrac{m^2}{(x+m)^2}=a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2m^2}{x+m}=am+m+1-b\\ \dfrac{m^2}{(x+m)^2}=a\end{cases} \Rightarrow \frac{(am+m+1-b)^2}{4m^2}=a\quad \forall m\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2m^2+2(1-b)(a+1)m+(1-b)^2=0\quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$$

Vậy (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y=x+1$.

Cách 2: Ta dễ dàng tìm được điểm cố định của (C_m) là $A(0;1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là: $y'(0)=1$ nên tiếp tuyến tại A có phương trình: $y=x+1$

Vậy (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y=x+1$.

Cách 3: Giả sử $M(x_0;y_0)$ là điểm mà không có đường nào của họ (C_m) đi qua

$\Rightarrow y_0=\dfrac{(m+1)x_0+m}{x_0+m} \Leftrightarrow (x_0+1-y_0)m=x_0y_0-x_0$ $(m\neq -x_0)$ vô nghiệm với mọi m

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0+1-y_0=0\\ x_0y_0-x_0\neq 0\end{cases}\\ (x_0+1-y_0)(-x_0)=x_0y_0-x_0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_0=x_0+1\\ x_0\neq 0\end{cases}\\ x_0=0\end{array}\right. \Leftrightarrow y_0=x_0+1$$

Ta dễ dàng chứng minh được (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y=x+1$

Vậy, (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y=x+1$.

Chú ý: Để chứng minh một họ đường cong $(C_m): y=F(x,m)$ tiếp xúc với một đường cong cố định ta có các cách sau

Cách 1. Sử dụng hệ để xét điều kiện tiếp xúc:

Giả sử họ (C_m) luôn tiếp xúc với đường cố định $(C): y=g(x)$. Khi đó hệ phương trình sau có nghiệm với mọi m: $\begin{cases}F(x,m)=g(x)\\ F'(x,m)=g'(x)\end{cases}$. Từ đây ta xác định được $g(x)$.

Ta thường chỉ áp dụng cách trên khi $y=g(x)$ là Parabol hoặc đường thẳng.

Cách 2. Phương pháp tiếp tuyến cố định:

(Áp dụng khi đường cố định là đường thẳng)

Tìm điểm cố định và viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm cố định là một đường thẳng cố định thì tiếp tuyến đó là đường thẳng cần tìm.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Cách 3. Phương pháp tìm đường biên của hình lồi:

* Tìm những điểm mà không có đường nào của (C_m) đi qua, chẳng hạn ta được quỹ tích những điểm này là bao lồi có đường biên (C): $y = g(x)$.

* Ta chứng minh (C_m) luôn tiếp xúc với đường (C): $y = g(x)$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của họ đồ thị (C_m):

$y = \frac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$ $(m \neq 0)$ luôn tiếp xúc với một Parabol cố định

Lời giải

Ta có $y = (m+1)x + m(m+1) + \frac{m^3}{x-m} \Rightarrow$ tiệm cận xiên của (C_m) là đường thẳng d có phương trình: $y = (m+1)x + m(m+1)$.

Cách 1: Giả sử d luôn tiếp xúc với Parabol (P) có phương trình:

$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Khi đó hệ phương trình sau có nghiệm với mọi m :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = (m+1)x + m(m+1) & (1) \\ 2ax + b = m + 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x = \frac{m+1-b}{2a}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{(m+1-b)^2}{4a} + \frac{b(m+1-b)}{2a} + c = \frac{(m+1)(m+1-b)}{2a} + m(m+1)$$

$\Leftrightarrow (1+4a)m^2 + 2[(1-b)+2a]m + (1-b)^2 - 4ac = 0$ (*)

Vì hệ có nghiệm với mọi m nên (*) đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4a = 0 \\ (1-b)+2a = 0 \\ (1-b)^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Vậy d luôn tiếp xúc với Parabol $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Cách 2: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm mà d không đi qua, khi đó phương trình

$y_0 = (m+1)x_0 + m^2 + m \Leftrightarrow m^2 + (x_0+1)m + x_0 - y_0 = 0$ vô nghiệm $\forall m$

$\Leftrightarrow \Delta = (x_0+1)^2 - 4x_0 + 4y_0 < 0 \Leftrightarrow y_0 < -\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{4}$.

Ta dễ dàng chứng minh được d luôn tiếp xúc với Parabol

$$(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + mx + 3m - 2$ có đồ thị là (C_m).

1. Tìm trên (C_1) những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
2. Tìm m để trên tồn tại ít nhất một cặp điểm đối xứng nhau qua trục tung.
3. Tìm tất cả các điểm cố định họ đường cong (C_m) luôn đi qua.
4. Tìm những điểm cố định mà không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m).

1. Tìm những điểm cố định mà họ đồ thị (C_m) luôn đi qua.
2. Tìm tập hợp những điểm mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua.

Bài 3:

1. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x + m}$, m là tham số. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$ (C_m) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

2. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = 2mx - m^2 + 4 + \frac{1}{x-1}$, m là tham số khác 0. Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ đường tiệm cận xiên của (C_m) luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

3. Cho họ đồ thị (C_m): $y = \frac{(m-1)x + m}{x - m}$, m là tham số khác 0. Chứng minh rằng họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.

4. Chứng minh rằng với mọi tham số m khác 0, đồ thị (Hm): $y = \frac{(m-2)x + 3m - 2}{x + 1 - m}$ luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.

Bài 4:

1. Cho họ đồ thị (Cm): $y = mx^4 - (4m-1)x^2 + 3m + 1$. Tìm các điểm trên đường thẳng (d): $y = x + 1$ mà không có đồ thị (Cm) nào đi qua dù m lấy bất kỳ giá trị nào.

2. Cho họ đồ thị (Cm): $y = (m+3)x^3 - (3m+7)x + m + 3$. Chứng minh rằng (Cm) đi qua ba điểm cố định thẳng hàng.

3. Cho họ đồ thị (Cm): $y = mx^4 + (m^2 + 2m)x^2 + m^3$. Chứng minh rằng với mọi điểm A cho trước trên mặt phẳng tọa độ, ta luôn tìm được duy nhất một giá trị m thích hợp để (Cm) đi qua A.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bài toán 01: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

Bài 1:

1. Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ (hay hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng xác định).

2. Hàm số y nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ (hay hàm số y nghịch biến trên mỗi khoảng xác định).

3. Hàm số y nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ (hay hàm số y nghịch biến trên mỗi khoảng xác định).

4. Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ (hay hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng xác định).

Bài 2:

1. Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng: $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

2. Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng: $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

3. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ và $(1;2)$.

4. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

Bài 3: Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

2. Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

3. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$ và $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(1;3)$

5. Trên khoảng $(-4;2)$: $y'>0 \Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$,

Trên mỗi khoảng $(-\infty;-4),(2;+\infty)$: $y'<0 \Rightarrow y$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-4)$, $(2;+\infty)$

Bài 4:

1. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$; nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

2. Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

3. Hàm số y đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$, nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

4. Hàm số y đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Bài 4: $y'=6(x^8-x^5+x^2-x+1)$

Xét các trường hợp sau.

$x\in(-\infty;0]$, khi đó $x^8\ge 0$, $x^5\le 0$, $x^2\ge$, $x\le 0 \Rightarrow y'>0\ \forall x\in(-\infty;0]$

$x\in(0;1]$, khi đó $x^2\ge x^5$, $1-x\ge 0$, $x^8>0 \Rightarrow y'>0\ \forall x\in(0;1]$.

$x\in(1;+\infty)$, khi đó $x^8>x^5$, $x^2>x \Rightarrow y'>0\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Vậy $\forall x\in\mathbb{R}, y'>0$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 02: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, CHỨA CĂN THỨC

Bài 1:

1. Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$; nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

2. Hàm số đồng biến trên $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ và $(\sqrt{2};+\infty)$, nghịch biến trên $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};0\right)$.

3. Hàm số y đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;3)$.

4. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

Bài 2:

1. $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ 2x-x^2=(x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2-4x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy, hàm số y đồng biến trên $\left(0;1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và nghịch biến trên $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$.

2. Hàm số y giảm trên các khoảng $\left(-3;-\frac{9}{4}\right)$, $(2;3)$ và tăng trên khoảng $\left(-\frac{9}{4};2\right)$.

3. Hàm số y đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-4)$.

4. $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+3}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\frac{3}{2}\\ x^2+3x+3=(2x+3)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 3

1. Ta có: $y'=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$: $y'>0\Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$;

Trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$: $y'<0\Rightarrow y$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Bài 4:

1. Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.
2. Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$ và $(1;+\infty)$; nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(-1;1)$.

Bài 5:

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Cách 1: Ta có: $y=\sqrt{(x^2-2x-3)^2}\Rightarrow y'=\frac{2(x-1)(x^2-2x-3)}{\sqrt{(x^2-2x-3)^2}}$.

Vậy, hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Cách 2: $y=|x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3 \text{ khi } x\le -1 \vee x\ge 3\\ -x^2+2x+3 \text{ khi } -1<x<3\end{cases}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

$y'=\begin{cases}2x-2 \text{ khi } x<-1 \vee x>3\\ -2x+2 \text{ khi } -1<x<3\end{cases}$. Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ và $x=3$.

Vậy, hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

2. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\begin{cases}x^2-4x+3+4x+3=x^2+6 \text{ khi } x\le 1 \vee x\ge 3\\ -x^2+4x-3+4x+3=-x^2+8x \text{ khi } 1\le x\le 3\end{cases}$

Khi $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ thì: $y'=2x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Khi $x\in(1;3)$ thì: $y'=-2x+8\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=4\notin(1;3)$

Tại $x=1$, ta có: $\begin{cases}f'(1^+)=6\\ f'(1^-)=2\end{cases}$. Vì $f'(1^+)\ne f'(1^-)$ nên $f'(1)$ không tồn tại.

Tại $x=3$, ta có: $\begin{cases}f'(3^+)=6\\ f'(3^-)=2\end{cases}\Rightarrow f'(3)$ không tồn tại.

Vậy, hàm số y đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Bài toán 03: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ KHÁC

1. Hàm số y đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $(1;+\infty)$.

2. Trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$: $y'>0\Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$;

Trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$: $y'<0\Rightarrow y$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

3. Trên khoảng $(0;2)$: $y'>0\Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$;

Trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$: $y'<0\Rightarrow y$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Bài toán 04: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1:

1. Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$

Ta có: $y'=2\cos x(1-2\sin x)$. Ta cần tìm nghiệm của phương trình $y'=0$ trên khoảng $(0;\pi)$ $y'=0\Leftrightarrow x\in(0;\pi):\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{5\pi}{6}$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$.

2. Hàm số đã cho xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $y'=2\cos 2x+2\sin x-2=2(1-2\sin^2 x)+2\sin x-2$

$y'=-2\sin x(2\sin x-1)$

Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ -2\sin x(2\sin x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$

Hàm số giảm trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ và tăng trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

http://sachxua.edu.vn

http://sachxua.ed

www.facebook.com/daykem.quynhon

+ Xét $m^2-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne \pm 1$

+ Nếu $m<-1\vee m>2$ thì $y'>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $m=2$ thì $y'=3(x+1)^2$, ta có: $y'=0\Leftrightarrow x=-1, y'>0, x\ne -1$. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-1]$ và $[-1;+\infty)$ nên hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $-1<m<2, m\ne 1$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Giả sử $x_1<x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$. Do đó $-1<m<2, m\ne 1$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do đó hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\le -1\vee m\ge 2$.

4. Hàm số đồng biến trên D $\Leftrightarrow \forall x\in D, y'\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in D, \sqrt{x-2}+\sqrt{x-4}\ge -m$ (1)

Xét hàm $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-4}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \forall x\in D, f(x)\ge -m$.

Lập bảng biến thiên của f(x) trên $[4;+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}>0\ \forall x\in(4;+\infty)$.

Lại có f(x) liên tục trên $[4;+\infty)$, do đó f(x) đồng biến trên $[4;+\infty)$, suy ra

$\min\limits_{x\in[4;+\infty)} f(x)=f(4)=\sqrt{2}$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên D $\Leftrightarrow m\ge -\sqrt{2}$

5. $\forall x\in\mathbb{R}, y'\ge 0\Leftrightarrow 1-|m|\ge 0\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Bài 4: Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x\ne\frac{1}{2}$

tức $-6x^2+6x+4-m\le 0,\ \forall x\ne\dfrac{1}{2}\Rightarrow m\ge\dfrac{11}{2}$

Dạng 3: Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu trên khoảng xác định

Bài toán 01: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG $K=(-\infty;\alpha),(\beta;+\infty),(-\infty;\alpha],[\beta;+\infty)$

Bài 1:

1. Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow$ hàm số xác định trên $(2;+\infty)$ và

$\forall x\in(2;+\infty), y'>0\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin(2;+\infty)\\-2m+1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2\\m>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<m\le 2$.

2. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}y'<0,\forall x\in(-\infty;1)\\-m\notin(-\infty;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\-m\notin(-\infty;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\-m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le -1$

3. Ta có: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow m\le 2x^2-4x+3$. Đặt $g(x)=2x^2-4x+3\Rightarrow g'(x)=4x-4$

Hàm số cho đồng biến trên $(-\infty;-1)\Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\le\min\limits_{(-\infty;-1]} g(x)\to m\le 9$

4. Đặt $t=x-1$, khi đó: $f(x)\le 0$ trở thành: $g(t)=-t^2-2(1-2m)t-m^2+4m-1\le 0$

Hàm số cho nghịch biến trên $(-\infty;1)\Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2m\ge 1\\g(t)\le 0, \forall t<0\end{cases}$ (*)

Với $m>\dfrac{1}{2}$ thì (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'=0\\\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\\begin{cases}m\ne 0\\4m-2>0\\m^2-4m+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m\ge 2+\sqrt{3}\end{array}\right.$

5. $x^2+6x+9-m^2\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ (vì $(x+3)^2>0,\ \forall x>1$) hay $(x+3)^2\ge m^2$ với $\forall x\in(1;+\infty)$. Xét $g(x)=(x+3)^2$ trên khoảng $(1;+\infty)$ và $g'(x)=2(x+3)$ với $x>1$ $\Rightarrow x+3>4$ tức $g'(x)>8>0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=16$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Khi đó $m^2\le(x+3)^2,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m^2\le 16$ hay $-4\le m\le 4$.

Bài 2:

1. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\ge m\Leftrightarrow\dfrac{5}{4}\ge m$.

2. Ta có: $y'=3x^2+6x-m$. y' có $\Delta'=3(m+3)$.

+Nếu $m\le -3$ thì $\Delta'\le 0\Rightarrow y'\ge 0,\forall x\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow m\le -3$ thoả

+Nếu $m>-3$ thì $\Delta'>0\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 $(x_1<x_2)$. Khi đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;x_1),(x_2;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)\Leftrightarrow 0\le x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\P\ge 0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\-m\ge 0\\-2>0\end{cases}$

3. $\forall x\in(1;+\infty), x^2-2mx+1-2m\ge 0\Leftrightarrow\forall x\in(1;+\infty), x^2+1\ge 2m(x+1)$

$\Leftrightarrow\forall x\in(1;+\infty), \dfrac{x^2+1}{x+1}\ge 2m$ (do $x+1>0$ khi $x>1$).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$, $x\in(1;+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\in(1;+\infty)$.

$\forall x\in(1;+\infty), f(x)\ge 2m\Leftrightarrow\min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)\ge 2m\Leftrightarrow f(1)\ge 2m\Leftrightarrow 1\ge 2m\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{2}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. $f(x)=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)\ge 0\quad \forall x\in[2;+\infty)$

Vì $x_1<x_2$ nên $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\le x_1$ hoặc $x\ge x_2$.

Do đó $f(x)\ge 0\ \forall x\in[2;+\infty)\Leftrightarrow x_2\le 2\Leftrightarrow \sqrt{\Delta'}\le 5-m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 5\\ \Delta'\le(5-m)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 5\\ 2m^2+m-6\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le\frac{3}{2}.$$

5. $y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow mx^2+4(m-1)x+m-1\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+4x+1)m\ge 4x+1,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow m\ge\dfrac{4x+1}{x^2+4x+1},\forall x\in(2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+4x+1},x\in(2;+\infty)\ \Rightarrow g'(x)=\dfrac{-2x(2x+1)}{(x^2+4x+1)^2}<0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\dfrac{9}{13},\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. Vậy $m\ge\dfrac{9}{13}$

6. $f(x)=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)\ge 0,\quad \forall x\in[2;+\infty)$

Vì tam thức $f(x)$ có $\Delta'=7m^2-7m+7>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ có hai nghiệm:

$x_1=\dfrac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{3};x_2=\dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}$. Vì $x_1<x_2$ nên $f(x)\Leftrightarrow x\le x_1$ hoặc $x\ge x_2$

Do đó $f(x)\ge 0\ \forall x\in[2;+\infty)\Leftrightarrow x_2\le 2\Leftrightarrow\sqrt{\Delta'}\le 5-m\Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}$

Bài 3:

1. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$, $(m+1;+\infty)$, hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$

2. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0$ và $x_1<x_2\le 2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ (x_1-2)+(x_2-2)<0\\ (x_1-2).(x_2-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le m\le 2\\ m>-5\end{cases}\Rightarrow -\frac{3}{2}\le m\le 2$$

3. $y'=-3x^2-6x+m\le 0,\forall x>0\Leftrightarrow m\le 3x^2+6x=f(x)$

Ta có $f'(x)=6x+6>0,\forall x>0$ và $f(0)=0$. Từ đó ta được: $m\le 0$.

4. **Cách 1:** $y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow g(x)=6x^2-4x\ge -m,x>1$.

$g'(x)=12x-4>0,\forall x>1\Leftrightarrow g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

và $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(6x^2-4x)=2,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2\ge -m\Leftrightarrow m\ge -2$

Cách 2: Khi và chỉ khi hoặc $\Delta'=4-6m\le 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{2}{3}(a)$ hoặc $f(x)=0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1\le x_2\le 1(*)$. Đặt $t=x-1\Rightarrow x=t+1$, khi đó $g(t)=f(t+1)$. Điều kiện

$(*)\Leftrightarrow g(t)=6t^2+8t+2+m$ có hai nghiệm không dương, tức là $\begin{cases}\Delta'_g\ge 0\\ S_g\le 0\\ P_g\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow ...(b)$.

Bài toán 02: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG XÁC ĐỊNH $(\alpha;\beta)$; $[\alpha;\beta]$

Bài 1:

1. + $m\le 0$, $y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow m\le 0$ thoả mãn.

+ $m>0$, $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt: $-\sqrt{m},\ 0,\ \sqrt{m}$.

Hàm số cho đồng biến trên (1; 2) $\Leftrightarrow\sqrt{m}\le 1\ \Leftrightarrow 0<m\le 1$. Vậy $m\in(-\infty;1]$.

2. $\forall x\in[3;4],3x^2-2(m+2)x+3m+2\ge 0\Leftrightarrow\forall x\in[3;4],3x^2-4x+2\ge m(2x-3)$

$\Leftrightarrow\forall x\in[3;4],\dfrac{3x^2-4x+2}{2x-3}\ge m$. Xét $g(x)=\dfrac{3x^2-4x+2}{2x-3}$, $x\in[3;4]$.

$g'(x)=\dfrac{6x^2-18x+8}{(2x-3)^2}=\dfrac{2[3x(x-3)+4]}{(2x-3)^2}>0$ với mọi x thuộc đoạn $[3;4]$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên đoạn $[3;4]\Rightarrow\min\limits_{x\in[3;4]}g(x)=g(3)=\dfrac{17}{3}$

Bài 2:

1. Hàm số nghịch biến trên $[-2;-1]$

$\Leftrightarrow\forall x\in[-2;-1],y'\le 0\Leftrightarrow\forall x\in[-2;-1],3x^2-6x+1\ge -2m$.

Xét $h(x)=3x^2-6x+1$ trên $[-2;-1]$

$\forall x\in[-2;-1],h(x)\ge -2m\Leftrightarrow\min\limits_{x\in[-2;-1]}h(x)\ge -2m\Leftrightarrow 10\ge -2m\Leftrightarrow m\ge -5$

2. **Cách 1:** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in(-1;1)$.

Xét hàm số $g(x)=-(3x^2+6x+1),\forall x\in(-1;1)$

$\Rightarrow g'(x)=-6x-6<0,\forall x\in(-1;1)\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và

$\lim\limits_{x\to -1^+}g(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=-10$. Vậy $m\le -10$ thoả yêu cầu.

Cách 2: $y''=6x+6$

Nghiệm của phương trình $y''=0$ là $x=-1<1$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m\le\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=-10$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Xét hàm số $g(x)=\frac{2x-3}{3x^2}$ liên tục trên khoảng $(-3;0)$, ta có

$g'(x)=\frac{-6x^2+18x}{9x^4}<0, \forall x\in(-3;0) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$ và

$\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)=-\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$. Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\ge \frac{1}{3}$.

Dạng 4: Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu trên khoảng có độ dài k cho trước

Bài 1:

1.

+ Nếu $m\ge 3$ thì $y'\ge 0, \forall x\in \mathbb{R}$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow m\ge 3$ không thoả mãn.

+ Nếu $m<3$ thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$. Hàm số nghịch biến trên đoạn $[x_1;x_2]$ với độ dài $|x_1-x_2|$. Ta có: $x_1+x_2=-2;\ x_1x_2=\frac{m}{3}$.

Theo bài toán $\Leftrightarrow d>1 \Leftrightarrow |x_1-x_2|>1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2>1$.

2. Ta có: $y'=-6x^2+6mx$ và $y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=m$

+ Nếu $m=0 \Rightarrow y'\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow m=0$ không thoả

+ Nếu $m\ne 0$, $y'\ge 0, \forall x\in(0;m)$ khi $m>0$ hoặc $y'\ge 0, \forall x\in(m;0)$ khi $m<0$.

Vậy hàm số đồng biến trên đoạn $[x_1;x_2]$ có $|x_2-x_1|=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_1;x_2)=(0;m)\\(x_1;x_2)=(m;0)\end{array}\right. \text{ và } |x_2-x_1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-0=1\\0-m=1\end{array}\right. \Leftrightarrow m=\pm 1.$$

3. $m=\frac{5}{3}$ hoặc $m=\frac{-7}{3}$.

Bài 2:

1. * Nếu $m\le -2 \Rightarrow \Delta'\le 0 \Rightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng đồng biến.

* Nếu $m>-2 \Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm $x_1<x_2$ và $y'\ge 0 \Leftrightarrow x\in[x_1;x_2] \Rightarrow$ yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |x_1-x_2|<1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2<1 \Leftrightarrow 4+\frac{4(m-1)}{3}<1 \Leftrightarrow m<-\frac{5}{4}$.

Bài 3:

1. Ta có: $y'=3(m+1)x^2-6(m+1)x+2m$

- $m=-1 \Rightarrow y'=-2<0$ (loại).
- $m>-1$. Khi đó hàm số luôn có khoảng đồng biến có độ dài lớn hơn 1.
- $m<-1$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $|x_1-x_2|\ge 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9(m+1)^2-6m(m+1)>0\\(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+3)(m+1)>0\\3-\frac{8m}{3(m+1)}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m\le -9 \text{ (Do } m<-1).$$

2. $m^2-3m-180=0 \Leftrightarrow m=-12$ hoặc $m=15$ (thỏa điều kiện).

Dạng 5: Ứng dụng đơn điệu trong giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình.

Bài 1:

1. Mà $f'(x)=\frac{7}{2\sqrt{7x+7}}+\frac{7}{2\sqrt{7x-6}}>0\ \forall x>\frac{6}{7}$

Nên $f(x)=f(6)\Leftrightarrow x=6$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2. Ta có: $y'=\frac{3(x^2+1)}{2\sqrt{x^3+3x}}+2(x+2)>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$, do đó nếu phương trình đã cho có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất và $y(1)=0$.

3. $(x+1)^3+x+1=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}$, xét hàm số $f(t)=t^3+t,\ t>0$

4. $(3x-1)^3+2(3x-1)=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$, xét hàm số $f(t)=t^3+2t$

Bài 2: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3\sqrt{5x-x^2}+(\sqrt{5x-x^2})^3=3(x+1)+(x+1)^3$ (1)

Đặt $u=\sqrt{5x-x^2}$, $u\ge 0$ và $v=x+1$, $v>0$. (1) trở thành: $3u+u^3=3v+v^3$ (2)

Xét hàm số $f(t)=3t+t^3$, $t\in(0;+\infty)$, khi đó phương trình (2) có dạng $f(u)=f(v)$.

Ta có $f'(t)=3+3t^2>0$ với mọi $t\in(0;+\infty)$ nên f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x-x^2}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\5x-x^2=x^2+2x+1\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{1}{2}$.

Bài 3:

1. $6(4x-6)(x-1)+\frac{4x-6}{\sqrt{(x-1)(5x-7)}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-7}\right)}=0$

Cách khác: $(5x-6)^2-\frac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}}=x^2-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$,

Xét hàm số $f(t)=t^2-\frac{1}{\sqrt{t-1}}$ với $t>1$, ta tìm được $x=\frac{3}{2}$.

2. Phương trình cho biến đổi về: $x^9+3x^3=(3x+1)^3+3(3x+1)$ (*)

Dễ thấy $f(t)=t^3+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên (*) $\Leftrightarrow x^3=3x+1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Đặt $x=2\cos t,\ t\in[0;\pi]$, từ đây tìm được $t=\frac{\pi}{9},\ t=\frac{5\pi}{9},\ t=\frac{7\pi}{9}$

3. Đặt $y=\sqrt[3]{x-2}$. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}8x^3-60x^2+151x-128=y\\ x=y^3+2\end{cases}$

Cộng vế theo vế và đưa về phương trình $(2x-5)^3+2x-5=y^3+y$

Dễ thấy $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $y=2x-5$ tức $\sqrt[3]{x-2}=2x-5\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow$

$(x-3)(8x^2-36x+41)=0\Rightarrow\ x=3$.

4. Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$. Đưa phương trình về dạng $f(x+1)=f(y)$.

Xét $f(t)=t^3+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi ấy $f(x+1)=f(y)\ \Leftrightarrow x+1=y$, ta tìm được $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ x=5$

5. Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $f(y)=f(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$ với $y=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\ \Rightarrow x=1,\ x=2,\ x=3$

Bài 4:

Điều kiện: $\begin{cases}2x-x^2\ge 0\\ 1-y^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ -1\le y\le 1\end{cases}$

Hệ phương trình viết lại: $\begin{cases}(x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3-3\sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1\end{cases}$

Xét hàm số: $f(t)=t^3-3t$ với $t\in[-1;1]$

Ta có: $f'(t)=3t^2-3<0,\forall t\in(-1;1)$, suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

Ta có hệ: $\begin{cases}x-1=\sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{2x-x^2}=4x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\pm1\end{cases}$

Bài 5:

1. Lấy $(1)-(2)\times 3$ ta được $(x-1)^3=(2-y)^3\Rightarrow(x;y)=(2;1),(1;2)$

2. Lấy $(1)-(2)\times 3$ ta được $(x-4)^3=(3-y)^3\Rightarrow(x;y)=(3;4),(4;3)$

3. Lấy $(1)-(2)\times 8$ ta được $(x-2)^2=(y-4)^4\Rightarrow(x;y)=(-4;-2),(4;2)$

4. Đặt $t=x+1,\ 0\le t\le 2$. Biến đổi hệ cho về hệ: $\begin{cases}t^3-3t^2=y^3-3y^2\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0\end{cases}$

Xét $f(u)=u^3-3u^2$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$ khi đó $t=y\Rightarrow(x;y)=(0;1)$

5. Phương trình đầu viết lại: $x+\sqrt{1+x^2}=(-y)+\sqrt{1+(-y)^2}$

Dễ thấy $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $x=-y$ thay vào phương trình thứ 2 ta được $x\sqrt{2x^2+6x+1}=-4x^2+6x+1$ hay $\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25x^2}{4}$

6. Xét $f(t)=t^3+t$ suy ra $1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}\Rightarrow(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$

Bài 6: 1. $(x;y)=\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$　　2. $(x;y)=(1;2)$

3. Phương trình thứ nhất viết lại $y^3+y=(x+1)^3+x+1$, suy ra $y=x+1\Rightarrow$ phương trình 2 ta được $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-1$.

Đặt $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$, giải được $t=2\ \Rightarrow(x;y)=(0;1)$.

4. Trừ 2 vế phương trình ta được:

$\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}+x^2+2x=\sqrt{y^2+2y+22}+\sqrt{y}+y^2+2y$

Xét hàm $f(t)=\sqrt{t^2+2t+22}+\sqrt{t}+t^2+2t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ suy ra $x=y$, thay vào phương trình thứ nhất, sau đó xét hàm số $g(x)$, dễ thấy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $g(1)=0$

5. Phương trình đầu $\Leftrightarrow 2(2x)+(2x)^3=2(y+1)+(y+1)^3$

Hàm số $f(t)=2t+t^3\ (t\in\mathbb{R})$ đồng biến $\forall t>0$, suy ra $y=2x-1$

6. Đặt $t=\frac{4}{x}$, hệ cho đưa về dạng: $\begin{cases}3y+55=t^3\\ y^3+3y^2+3y=3t+51\end{cases}$, cộng vế theo vế ta được

$(y+1)^3+3(y+1)=t^3+3t$

Dạng 6: Chứng minh phương trình có n nghiệm

Bài 1:

1. Ta có: $f'(x)=5(x^4-1)=5(x^2-1)(x^2+1)$, vì $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f'(x)=0\Leftrightarrow$ $x=-1$ hoặc $x=1$. $f(x)<0,\forall x\le 1\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm khi $\forall x\le 1$.

Vì $f(1)=-9$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên phương trình có nghiệm $x>1$

$f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó hàm số y cắt trục hoành tại 1 giao điểm

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. *Cách 1:* Xét hàm số $y=2x^2\sqrt{x-2}$ liên tục trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

Ta có: $y'=\frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}}>0,\forall x\in(2;+\infty)$ $\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2\sqrt{x-2}\right)=+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm số $y=2x^2\sqrt{x-2}$ luôn cắt đường thẳng $y=11$ tại duy nhất một điểm.

Cách 2: Xét hàm số $y=f(x)=2x^2\sqrt{x-2}-11$ liên tục trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=-11, f(3)=7$. Vì $f(2).f(3)=-77<0\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2;3)$. $f'(x)=\frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}}>0,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(2;3)$.

3. Điều kiện: $x>\sqrt{2}$ hoặc $x<\sqrt{2}$

Xét hàm số: $f(x)=x^5+\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}-2012$ với $x>\sqrt{2}$.

$f'(x)=5x^4-\frac{1}{\sqrt{(x^2-2)^3}}\Rightarrow f''(x)=20x^3+\frac{3x}{\sqrt{(x^2-2)^5}}>0,\forall x>\sqrt{2}$

$\Rightarrow f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm và

$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}f(x)=+\infty, f(\sqrt{3})<0, \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm $x_1\in(\sqrt{2};\sqrt{3})$ và $x_2>\sqrt{3}$.

Bài 2: $x^5=\sqrt{x^2+1}+x^4-2x^2+1=\sqrt{x^2+1}+(x^2-1)^2\ge1\Rightarrow x\ge1$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x^4-2x^2+1-x^5$, khi đó hàm số f liên tục trên $[1;+\infty)$ và phương trình (1) có dạng $f(x)=0$.

Vì $\begin{cases}f(1)=\sqrt{2}-1>0\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^5\left(\sqrt{\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{10}}}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}-1\right)=-\infty\end{cases}$

nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;+\infty)$.

Lại có: $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+4x^3-4x-5x^4=x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-4\right)+x^3(4-5x)<0$

Với mọi $x\in[1;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng một nghiệm.

Dạng 7: Chứng minh bất đẳng thức

Bài 1:

1. Ta có $f'(x)=\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2},\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Xét hàm số $g(x)=x.\cos x-\sin x$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và có $g'(x)=-x.\sin x<0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow g(x)$ liên tục và nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và ta có $g(x)<g(0)=0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Từ đó suy ra $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}<0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f(x)$ liên tục và nghịch biến trên nửa khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, ta có $f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

và $f(x)<f(0)=1$ $\left(\text{vì }\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1\right)$

2. $\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^2}{6}\Rightarrow\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^3=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}$

$\Rightarrow\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{24}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$

Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow1-\frac{x^2}{9}>0\Rightarrow\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

Mặt khác: $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}>\cos x,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}$ liên tục trên nửa khoảng $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x)=-\frac{2\cos x}{\sin^3x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2\left(-x^3\cos x+\sin^3x\right)}{x^3\sin^3x}$. Ta có: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow-x^3\cos x+\sin^3x>0$ $,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{4}{\pi^2},\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$. Do vậy: $\frac{1}{\sin^2x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$, $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

4. Ta có: $2^{2.\sin x}+2^{\tan x}\ge2.\sqrt{2^{2\sin x}.2^{\tan x}}=2.2^{\sin x+\frac{1}{2}\tan x}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta chứng minh: $2^{\sin x+\frac{1}{2}\tan x}\ge 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow \sin x+\frac{1}{2}\tan x\ge\frac{3}{2}x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\tan x-\frac{3x}{2}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$f'(x)=\cos x+\frac{1}{2.\cos^2 x}-\frac{3}{2}=\frac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{2\cos^2 x}\ge 0, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0 \Rightarrow \sin x+\frac{1}{2}\tan x\ge\frac{3}{2}x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 2: Xét hàm số $f(x)=3x-x^3$, $x\in[-2;2]$.

Ta có: $f'(x)=3-3x^2$, trên khoảng $(-2;2)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1$.

Từ bảng biến thiên, ta kết luận: hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$ và nghịch biến trên các đoạn $[-2;-1]$, $[1;2]$. Vì $-2=f(-1)\le f(x)\le f(-2)=2$, $\forall x\in[-2;-1]$

Nên $-2=f(-1)\le f(x)\le f(1)=2$, $\forall x\in[-1;1]$, $-2=f(2)\le f(x)\le f(1)=2$, $\forall x\in[1;2]$.

Bài 3:

1. Chứng minh hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

2. Xét hàm số $f(x)=\tan x+\sin x-2x$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

3. Xét hàm số: $f(x)=\frac{x^2}{2}+\cos x-1, x\in\mathbb{R}$, ta có: $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)$ suy ra f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$, (1) $\Leftrightarrow \forall x\in[0;+\infty), f(x)\ge 0$, $f'(x)=x-\sin x\ge 0$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow \forall x\in[0;+\infty), f(x)\ge f(0)=0$ (đpcm).

4. Xét hàm số $f(x)=3\sin x+6\tan x+2\tan^3 x-9x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$f'(x)=3\cos x+\frac{6}{\cos^2 x}+6\tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)-9$

$=3\cos x+\frac{6}{\cos^2 x}+6\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)-9=3\cos x+\frac{6}{\cos^4 x}-9$

Vì $\cos x\in(0;1)$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$f'(x)=3\left(\cos x+\frac{1}{\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\right)-9\ge 3.3\sqrt[3]{\cos x.\frac{1}{\cos^4 x}.\frac{1}{\cos^4 x}}-9$

$\Rightarrow f'(x)\ge 9\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^7 x}}-9>0, \forall x\in x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Lại có $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ do đó $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right), f(x)>f(0)=0$ (đpcm).

Bài 4:

Xét hàm số $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta cần chứng minh: $f(x)>f(0)$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ điều này gợi ý ta chứng minh hàm $y=f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có: $f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}\Rightarrow f''(x)=-\sin x+x\ge 0\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=0\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x>x-\frac{x^3}{3!}\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 5:

1. Ta chứng minh hàm số $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$ đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ và hàm số $g(x)=4\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-3x$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Chứng minh $\cos(\sin x)>\cos x>\sin(\cos x)$

3. Xét hàm $f(x)=a^\alpha-b^\alpha+x^\alpha-(a-b+x)^\alpha$ với $x\in[0;b]$

4. Bất đẳng thức cho $\Leftrightarrow 4\sin a+6\tan a-10a>4\sin b+6\tan b-10b$ (2)

Xét hàm số $f(x)=4\sin x+6\tan x-10x$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta phải chứng minh rằng $\forall a,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right), a>b\Rightarrow f(a)>f(b)$.

Như vậy chỉ cần chứng minh hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x)=4\cos x+\frac{6}{\cos^2 x}-10=4\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{2}{\cos^2 x}-10$.

Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x\in(0;1)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$f'(x)\ge 2\sqrt{4\cos x.\frac{4}{\cos^2 x}}+\frac{2}{\cos^2 x}-10=8\sqrt{\frac{1}{\cos x}}+\frac{2}{\cos^2 x}-10$.

Mặt khác do $\cos x\in(0;1)$ nên $\frac{1}{\cos x}>1, \frac{1}{\cos^2 x}>1$, suy ra $8\sqrt{\frac{1}{\cos x}}+\frac{2}{\cos^2 x}>10$

$\Rightarrow \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)>0\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

5. Xét hàm số $f(x)=x^4-ax-bx$ trên $[1;+\infty)$,ta có

$f'(x)=4x^3-2ax^2-b\ge 4-12+8=0$, $\forall x\in[1;+\infty)$, $a\le 6$, $b\le -8$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=1$, $a=6$, $b=-8$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow[1;+\infty)$, $f(x)\ge f(1)=1-a-b\ge 1-6+8=3\ge c$ (đpcm).

Bài 6:

Xét hàm số : $f(t)=\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}$, $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có : $f'(t)=-\frac{2\cos t}{\sin^3 t}+\frac{2}{t^3}=\frac{2}{\sin^3 t}\left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3-\cos t\right]>0,\forall t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

nên hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow f(t)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{4}{\pi^2},\forall t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$

Áp dụng vào bài toán ta có : $f(x)+f(y)+f(z)\le 3\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)$.

Bài 7:

1. Đặt : $t=\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Rightarrow 1<t\le\frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t}$ hàm số liên tục trên nửa khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0,\forall t\in\left(1;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left(1;\frac{3}{2}\right]$,suy ra : $2<f(t)\le\frac{13}{6}$.

Đẳng thức $f(t)=\frac{13}{6}$ xảy ra khi $t=\cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2}$ hay tam giác ABC đều.

2. Biểu thức xác định khi $D=(-\infty;\sin C)\cup[\sin A;+\infty)$.

$M'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin A}}\cdot\frac{\sin A-\sin C}{(x-\sin C)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin B}}\cdot\frac{\sin B-\sin C}{(x-\sin C)^2}>0,\forall x\in D\Rightarrow M$ liên tục và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;\sin C)$, $[\sin A;+\infty)$.

Do đó $\min M=M(\sin A)=\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}-1$.

Bài 8:

1. Ta có : $\begin{cases}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{cases}\Rightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p-a}{p}\cdot\frac{p-b}{p}\cdot\frac{p-c}{p}}$

và $\frac{r^2}{S}=\frac{S}{p^2}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}=\sqrt{\frac{p-a}{p}\cdot\frac{p-b}{p}\cdot\frac{p-c}{p}}$

Do đó : $\frac{r^2}{S}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

Mặt khác : $\frac{p}{r}=\frac{a+b+c}{2(p-a)\tan\frac{A}{2}}=\frac{a+b+c}{(b+c-a)\tan\frac{A}{2}}=\frac{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}{2R(\sin B+\sin C-\sin A)\tan\frac{A}{2}}$

$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\ge\frac{28}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\ge\frac{28}{3\sqrt{3}}$$

Đặt $t=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\Rightarrow t\ge 3\sqrt{3}$. Xét $f(t)=t+\frac{1}{t}$ với $t\ge 3\sqrt{3}$

Ta có: $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0\ \forall t\ge 3\sqrt{3}\Rightarrow\min f(t)=f(3\sqrt{3})=3\sqrt{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{28}{3\sqrt{3}}\Rightarrow$ đpcm.

2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $\frac{2R+a}{2R}\cdot\frac{2R+b}{2R}\cdot\frac{2R+c}{R}<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

$\Leftrightarrow\left(1+\frac{a}{2R}\right)\left(1+\frac{b}{2R}\right)\left(1+\frac{c}{2R}\right)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

Xét $f(x)=\ln(1+x)-x$ với $0<x<1$

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0\ \forall x\in(0;1)\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó

$\Rightarrow f(x)<f(0)=0\Rightarrow\ln(1+x)<x$

Lần lượt thay $x=\{\sin A,\sin B,\sin C\}$ vào bất đẳng thức trên rồi cộng lại ta được :

$$\ln(1+\sin A)+\ln(1+\sin B)+\ln(1+\sin C)<\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow\ln\left[(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)\right]<\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\sin A+\sin B+\sin C}$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

mà $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt3}{2}\Rightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\frac{3\sqrt3}{2}}\Rightarrow$ đpcm.

3. Không mất tổng quát giả sử $C=\min\{A,B,C\}$. Ta có:

$$(1+\cos^2A)(1+\cos^2B)=\left(1+\frac{1+\cos2A}{2}\right)\left(1+\frac{1+\cos2B}{2}\right)$$

Xét $P=4(1+\cos^2A)(1+\cos^2B)=(3+\cos2A)(3+\cos2B)$

$\Rightarrow P=9+3(\cos2A+\cos2B)+\cos2A\cos2B$

$=9+6\cos(A+B)\cos(A-B)+\frac12[\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)]$

$=9-6\cos C\cos(A-B)+\frac12[2\cos^2(A+B)+2\cos^2(A+B)-2]$

$=9-6\cos C\cos(A-B)+\cos^2C+\cos^2(A+B)-1$ do $|\cos(A-B)|\le1$

$\Rightarrow P\ge9-6\cos C+\cos^2C=(3-\cos C)^2$ mà $\cos C>0$

$\Rightarrow P(1+\cos^2C)\ge(3-\cos C)^2(1+\cos^2C)$

Mặt khác ta có: $0<C\le60^0\Rightarrow\cos C\ge\frac12$. Xét $f(x)=(3-x)^2(1+x^2)$ với $x\in\left[\frac12;1\right)$

Ta có: $f'(x)=2(x-3)(x-1)(2x-1)\ge0\ \forall x\in\left[\frac12;1\right)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó

$\Rightarrow f(x)\ge f\left(\frac12\right)=\frac{125}{16}\Rightarrow(1+\cos^2A)(1+\cos^2B)(1+\cos^2C)\ge\frac{125}{16}\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 02: ỨNG DỤNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ TRONG TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Bài 1. Đặt $t=\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$

Áp dụng BĐT trung bình cộng – trung bình nhân cho 2 số dương, ta có:

$a+b+c+d\ge2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}\ge4\sqrt[4]{abcd}$ suy ra $\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}\ge4$ tức $t\ge4$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d$. Bài toán quy về " Tìm giá trị nhỏ nhất của $A(t)=t+\frac1t$ với $t\ge4$"

Dễ thấy, $t\ge4$ thì $A(t)$ đồng biến và $A(4)=\frac{17}{4}$ đạt tại $t=4$.

Bài 2. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x\ge y\ge z$ và $x+y+z=3$ suy ra $1\le x\le3$.

Áp dụng Bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân: $yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$

Đặt $A=xyz+xy+yz+zx$, suy ra $A\le x\left(\frac{y+z}{2}\right)^2+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2+(y+z)x$

Hay $A\le x\left(\frac{3-x}{2}\right)^2+\left(\frac{3-x}{2}\right)^2+x(3-x)=\frac14(x^3-9x^2+15x+9)$.

Xét $f(x)=x^3-9x^2+15x+9$, với $1\le x\le3$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-18x+15\le0$ với mọi $x\in[1;3]$, suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[1;3]$. Với $\forall x\in[1;3]$: $f(x)\le f(1)=16$ suy ra $A\le\frac14f(1)$ hay $A\le4$.

Bài 3. Ta có: $4xy=3(x+y)\ge6\sqrt{xy}\Rightarrow xy\ge\frac94$. Hơn nữa vì $x\ge1,y\ge1$ nên $(x-1)(y-1)\ge0$ tức $xy+1\ge x+y\Rightarrow xy+1\ge\frac43xy$ hay $xy\le3$. Vậy $\frac94\le xy\le3$,

$P=\frac{64}{27}(xy)^3-4(xy)^2-\frac{6}{xy}+\frac{16}{3}$. $\min P=\frac{113}{12}$ khi $(x;y)=\left(\frac32;\frac32\right)$ và $\max P=\frac{94}{3}$ khi $(x;y)=(1;3)$, $(3;1)$.

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài toán 01: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH.

Bài 1: Hàm số có cực đại tại điểm $x=0$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(0)=-1$ và hàm số có cực tiểu tại điểm $x=2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2)=3$.

Bài 2:

1. Hàm số có cực tiểu tại $x=-2$, $y_{CT}=y(-2)=-9$; hàm số có cực đại tại $x=1$, $y_{CĐ}=y(1)=\frac92$.

2. Ta có: $y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\ge0\ \forall x\Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

3. Hàm số có cực đại tại $x=1; y(1)=\frac{29}{6}$ và đạt cực tiểu tại $x=2; y(2)=\frac{14}{3}$.

Bài 3:

1. *Cách 1 (dùng định lý 2, xét dấu y')*

Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=\pm1$ với giá trị tại điểm cực đại của hàm số là $y(\pm1)=2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ với giá trị tại điểm cực tiểu của hàm số là $y(0)=1$.

Cách 2 (dùng định lý 3).

$y''=-12x^2+4=-4(3x^2-1)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$y''(\pm1) = -8 < 0$ suy ra $x = \pm1$ là điểm cực đại của hàm số và $y_{CĐ} = 2$

$y''(0) = 4 > 0$ suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số và $y_{CT} = 1$

2. Điểm cực đại của hàm số là $x = -1$, $y_{CĐ} = \frac{15}{4}$

Nhận xét. Trong bài toán này, vì $\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) = 0 \end{cases}$ do đó ***định lý 3*** không khẳng định được điểm $x = 2$ có phải là điểm cực trị của hàm số hay không.

3. Hàm đạt cực đại tại $x = -2$, $y(-2) = 25$, hàm số không có cực tiểu.

Bài toán 02: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, CHỨA CĂN THỨC

Bài 1:

1. Ta có $y = 1 + \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = 1$.

2. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0, y(0) = 0$,

Hàm số đạt điểm cực tiểu tại $x = 1, y(1) = -2$.

Bài 2:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+6} - (x-2)\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}}{x^2-4x+6} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x+6}(x^2-4x+6)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $y' = \dfrac{2x\sqrt{x+1} - (x^2+20)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \dfrac{4x(x+1)-(x^2+20)}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = \dfrac{3x^2+4x-20}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 3x^2+4x-20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Bài 3:

1. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2}$, $y(\sqrt{2}) = 2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2}$, $y(-\sqrt{2}) = -2$.

2. Ta có: $y' = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{2\sqrt{x^2-3}-x}{\sqrt{x^2-3}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4(x^2-3) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ và hàm số không có đạo hàm tại $x = \pm\sqrt{3}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$, $y(2) = 3$, hàm số không có cực đại.

Bài 4:

1. Ta có: $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $y' = \sqrt{-x^2+4x-3} + \left(x+\frac{3}{2}\right)\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

$= \dfrac{-x^2+4x-3+\left(x+\frac{3}{2}\right)(-x+2)}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \dfrac{-2x^2+\frac{9}{2}x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, $x \in (1;3)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;3) \\ -2x^2 + \frac{9}{2}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;3) \\ x = 0 \vee x = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{9}{4}$, $y_{CĐ} = \frac{15\sqrt{15}}{16}$

Bài toán 03: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1:

$\sin^6\frac{x}{4} + \cos^6\frac{x}{4} = \left(\sin^2\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\cos^2\frac{x}{4}\right)^3 = \left(\sin^2\frac{x}{4} + \cos^2\frac{x}{4}\right)^3 - 3\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{3}{4}.\frac{1-\cos x}{2} = \frac{5+3\cos x}{8}$

$y' = -\frac{3}{8}\sin x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = (2k+1)\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

$y'' = -\frac{3}{8}\cos x, y''(2k\pi) = -\frac{3}{8}\cos(2k\pi) = -\frac{3}{8} < 0$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, y_{CĐ} = 1$.

$y''[(2k+1)\pi] = -\frac{3}{8}\cos\pi = \frac{3}{8} > 0$

$\rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $y_{CT} = \frac{1}{4}$

Bài 2:

1. Ta có: $y' = -\sin x\sqrt{\sin x} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.\cos x = \frac{1-3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin^2 x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (*)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Tồn tại góc β sao cho $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x = \beta$.

Với $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $y(\beta) = \cos\beta\sqrt{\sin\beta} = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = \beta, y(\beta) = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$ với $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $y = |\cos^3 x + \sin^3 x| + 3\sin 2x = |(\cos x + \sin x)(1 - \cos x.\sin x)| + \frac{3}{2}\sin 2x$

Vì $1 - \cos x.\sin x = \frac{1}{2}(2 - 2\cos x.\sin x) = \frac{1}{2}(2 - \sin 2x) > 0$

Nên $y = |\cos x + \sin x|(1 - \cos x.\sin x) + \frac{3}{2}\sin 2x$

Đặt $t = |\cos x + \sin x| \Rightarrow \cos x.\sin x = \frac{t^2-1}{2}, 0 \le t \le \sqrt{2}$

Khi đó $y = f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \quad, 0 \le t \le \sqrt{2}$

Ta có: $y' = \frac{3}{2}(-t^2 + 2t + 1) = \frac{3}{2}\left[2 - (t-1)^2\right] > 0, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$

Suy ra hàm số không có cực trị.

Dạng 2: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ HOẶC KHÔNG CÓ CỰC TRỊ

Bài 1:

1. Ta có: $y' = 3mx^2 + 6mx - m + 1$. Hàm số có đạo hàm tại mọi điểm nên x_0 là điểm cực trị của hàm số thì đạo hàm tại đó phải bằng 0. Vậy hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ phải có nghiệm và y' đổi dấu qua nghiệm đó.

* Nếu $m = 0 \Rightarrow y' = 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số không có cực trị

* Nếu $m \ne 0$. Khi đó y' là một tam thức bậc hai nên $y' = 0$ có nghiệm và đổi dấu khi qua các nghiệm $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{4}$.

2. Ta có $y' = 4mx^3 - 2(m-1)x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2mx^2 + m - 1 = 0 \quad (*)$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó. Khi đó phương trình $2mx^2 + m - 1 = 0 \quad (*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta' = -2m(m-1) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < 0 \ \vee \ m \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$$

Bài 2: $y' = 2x^3 - 2mx = 2x(x^2 - m)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow m \le 0$

Bài 3:

1. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9(m^2 - 4m + 5) > 0$ đúng với mọi m. Vậy hàm số luôn có cực trị với mọi m.

2. • Với $m = 0$ ta có $y = -x^2 + x - 1$, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$.

Suy ra $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

• $m \ne 0$, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 1 - 2m = 0$ (*)

Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác

$$\frac{1}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m(1-2m) > 0 \\ -\frac{1}{m} + 1 - 2m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m^2 - m + 1 > 0 \text{ đúng với mọi m.}$$

3. Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m - 3 > 0 \\ -2m + 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

4. + Nếu $m = 0$ thì $y = -x^2 + 2 \Rightarrow$ hàm số có một cực trị

+ Nếu $m \ne 0$ hàm số xác định $\forall x \ne \frac{1}{m}$.

Hàm số có cực trị khi phương trình $mx^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$\frac{1}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m - \frac{1}{m} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM

Bài 1:

1. $y' = 0 \Leftrightarrow x = m$ hoặc $x = m + 2, y(m) = m$ và $y(m+2) = m - 4$

Gọi $A(m;m)$, $B(m+2;m-4)$, suy ra $AB = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ = hằng số.

2. $M(-2;-3+m)$, $N(0;m+1)$ với mọi m $\Rightarrow MN = \sqrt{(0+2)^2 + (m+1+3-m)} = \sqrt{20}$.

3. $A(m;2m^3 + 3m^2 + 1)$, $B(m+1;2m^3 + 3m^2) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Bài 2:

1. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ tức là $y'(2) = 0 \Rightarrow 4 + 4(2m-1) + m - 9 = 0 \Rightarrow m = 1$.

Kiểm lại. Ta có $y'' = 2x + 2(2m-1)$. Khi $m = 1$ thì $y'' = 2x + 2$, suy ra $y''(2) = 6 > 0$.

2. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 6m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Khi đó $y''(1) = 10m - 4 = 6 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

3. Ta có: $y = x + \frac{1}{x+m} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+m)^2}$ và $y'' = \frac{2}{(x+m)^3}$

Cách 1: Vì hàm số có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq -m$ nên để hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$ thì trước hết $y'(1) = 1 - \frac{1}{(1+m)^2} = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -2$.

* $m = 0 \Rightarrow y''(1) = 1 > 0 \Rightarrow x = 1$ là điểm cực tiểu $\Rightarrow m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

* $m = -2 \Rightarrow y'(1) = -1 < 0 \Rightarrow x = 1$ là điểm cực đại $\Rightarrow m = -2$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: Ta có thể trình bày như sau:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$

4. Hàm số đạt cực đại tại

$x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{m-3}{(m-1)^2} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 2$.

- $m = -1 \Rightarrow y''(-1) = -1 < 0 \Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại
- $m = 2 \Rightarrow y''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow x = -1$ là điểm cực tiểu.

Bài 3:

1. $d = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \Rightarrow \min d = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

2. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{|2m + m + 1 - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |3m - 1| = 5 \Leftrightarrow m = 2, m = -\frac{4}{3}$

3. Gọi A, B là các điểm cực trị ta có: $A(1-m; -2-2m^3)$; $B(1+m; -2+2m^3)$.

Điểm O cách đều hai điểm A, B $\Leftrightarrow$ $OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$ $(m \neq 0)$.

Bài 4: $g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2}, y_1 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2}, y_2 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{array}\right.$

$y_1 . y_2 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5} \Rightarrow \min y_1 . y_2 = -\frac{4}{5}$ khi $m = \frac{7}{5}$.

Bài 5: Ta có: $y' = m + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m < 0$

$A(-\frac{1}{\sqrt{-m}}; 2\sqrt{-m})$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{-m}}; -2\sqrt{-m}\right)$, $AB^2 = \frac{4}{-m} + 16(-m) \geq 2\sqrt{\frac{4}{-m}.16(-m)} = 16$

Dạng 3: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ CÙNG DẤU, TRÁI DẤU

Bài 1:

1. Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 1$

Hai giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}[(1-m)x_1 - 1].\frac{2}{3}[(1-m)x_2 - 1] > 0$.

2. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9(m+2) > 0$ $\Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

$y_1 = 2(m-2)x_1 + m - 2$, $y_2 = 2(m-2)x_2 + m - 2$

Theo bài toán: $y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m + 17) > 0$

3. Do $\Delta' = 1 \Rightarrow$ hàm số luôn có hai cực trị; $y_1 = m(m^2 + 3)$, $y_2 = (m-1)(m^2 + m + 4)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Bài 2:

1. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 6 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

2. Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta' = 9(m+1)^2 - 6m(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Khi đó: $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow$ hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $x = 1$.

3. Hàm số có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x-1)(x^2 - 2mx + m) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x^2 - 2mx + m = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU NẰM VỀ MỘT PHÍA, HAI PHÍA CỦA HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Bài 1:

1. + Nếu $m \leq 0$ thì đồ thị có 1 điểm cực trị duy nhất $(0; -4) \in Oy$.

+ Nếu $m > 0$ thì (C_m) có 3 điểm cực trị $A(0; -4), B(-\sqrt{m}; m^2 - 4), C(\sqrt{m}; m^2 - 4)$.

Để A, B, C nằm trên các trục tọa độ thì B, C $\in$ Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 2: 1. Ta có $y' = 2(3x^2 + mx - 6) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + mx - 6 = 0$ (1)

Vì (1) luôn có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số luôn có hai cực trị.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai cực trị, hai điểm cực trị cách đều trục tung

$\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (vì $x_1 \neq x_2$) $\Leftrightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

2. Ta có $y' = \frac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0 \cdot (x \neq 1)$ (3)

(3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(6m+1) > 0 \\ -6m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{6} \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía trục Ox $\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2) < 0$ (*).

Lại có $y(x_1) = 2mx_1 + 3m$, $y(x_2) = 2mx_2 + 3m \Rightarrow y(x_1).y(x_2) = m^2 - 4m$

Bài 3: $m < -\frac{1}{\sqrt{5}}$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 03: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU NẰM VỀ MỘT PHÍA, HAI PHÍA CỦA ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Bài 1: Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có $d \perp \Delta$

Δ là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị $\Rightarrow k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow m = 0$

Với $m = 0$ thì đồ thị có hai điểm cực trị là (0; 0) và (2; –4), nên trung điểm của chúng là I(1; –2). Ta thấy $I \in d$, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.

Bài 2: Đường thẳng đi qua 2 cực trị là: $y = -2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1$

A, B đối xứng qua (d): $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Bài 3:

1. Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$

$\Delta \perp d$: $y = 3x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > \sqrt{21} \\ \frac{2}{9}(21 - m^2).3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

2. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là (t): $y = -\frac{2}{3}(m^2 - 5m + 4)x + \frac{5}{3}m^2 - \frac{4}{3}m + 2$.

Theo bài toán $(d) // (t)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} -\frac{2}{3}(m^2 - 5m + 4) = -\frac{8}{3} \\ \frac{5}{3}m^2 - \frac{4}{3}m + 2 \neq -3 \\ m^2 - 5m + 4 > 0 \end{cases}$

Bài 4:

1. Vì A, B cách đều đường thẳng $d: x - y = 0$ nên ta có các trường hợp

• Trung điểm $I(0; 1 - 3m)$ của AB thuộc d $\Leftrightarrow 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$.

• AB song song với đường thẳng d, nên $-2m = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ (loại).

2. $A\left(2; \frac{4}{3} - 4m\right)$ và $B\left(2m; \frac{4}{3}m^3 - 4m^2\right)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB thì tọa độ của I là

$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = m + 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2}{3}m^3 - 2m^2 - 2m + \frac{2}{3} \end{cases}$

$I \in$ đường thẳng $(d): 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = -1 \vee m = 4$

3. Với $m < \frac{3}{2}$ thì $A(x_1; y_1 = 2x_1 + 2m), B(x_2; y_2 = 2x_2 + 2m)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$.

$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[3(x_1 + x_2) + 4m + 4\right] = 0$

Bài 5: $y = -(3m-1)^2 x - m(m-1)(1-2m)$ là phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

1. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -(3m-1)^2 = -4 \\ -m(1-2m)(m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

2. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -(3m-1)^2 = -1 \Leftrightarrow m = 0, m = \frac{2}{3}$.

Bài 6:

1.* $x = -1$ là nghiệm của đa thức $x^2 - 2mx + m \Leftrightarrow 1 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$

Khi $m = -\frac{1}{3}$ thì $y = \frac{x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x+1} = \frac{(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x+1} = x - \frac{1}{3}$.

Vì $y' = 1 > 0$, $x \in D$ nên hàm số không có cực trị, do đó $m = -\frac{1}{3}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi $m \neq -\frac{1}{3}$, ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x - 3m}{(x+1)^2}$ Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 + 2x - 3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$ (*).

Gọi A, B là 2 điểm cực trị

A và B đối xứng qua đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow AB \perp (d)$ tại trung điểm I của AB. Vì tích của hai hệ số góc của hai đường thẳng AB và (d) = – 1 nên $AB \perp (d)$.

Trung điểm I của AB có tọa độ là $\begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -1 \\ y_I = 2x_I - 2m = -2 - 2m \text{ (do } I \in AB) \end{cases}$

$I \in (d) \Leftrightarrow -1 - 4 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện (*).

2. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0$ (1). Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 3(3 - m^2) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.

Nên phương trình đường thẳng d' đi qua các điểm cực trị là:

$y = \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m \Rightarrow$ các điểm cực trị là:

$A\left(x_1; \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x_1 + \frac{1}{3}m^2 + 3m\right)$, $B\left(x_2; \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x_2 + \frac{1}{3}m^2 + 3m\right)$.

$I = d \cap d' \Rightarrow I\left(\frac{2m^2 + 6m + 15}{15 - 4m^2}; \frac{11m^2 + 3m - 30}{15 - 4m^2}\right)$.

A và B đối xứng qua d thì trước hết $d \perp d' \Leftrightarrow \frac{2}{3}m^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$

Khi đó $I(1;-2)$ và $A(x_1; -2x_1)$; $B(x_2; -2x_2) \Rightarrow$ I là trung điểm của $AB \Rightarrow$ A và B đối xứng nhau qua d. Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 04: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU THỎA MÃN HOÀNH ĐỘ CHO TRƯỚC

Bài 1:

1. Ta có: $\Delta' > 0 \ \forall m$

$x_1 = -4x_2; \ x_1 + x_2 = -\frac{m}{6}; \ x_1x_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm\frac{9}{2}$

2. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình: $(m-1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Đặt $t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2$.

Phương trình (1) trở thành $(m-1)t^2 + (3m-7)t + m - 7 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow \frac{m-7}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 7$.

3. Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1

$\Leftrightarrow y' = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1) = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện: $x_1 < 1 < x_2$ (1) hoặc $x_1 < x_2 \le 1$ (2)

Theo định lý viet, ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1), x_1.x_2 = \frac{3m^2 + 7m - 1}{3}$

• $x_1 < 1 < x_2$ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < 1$ (a)

• $x_1 < x_2 \le 1$ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 < 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\frac{4}{3}$ (b)

4. Nếu $m = 0$ thì $y' = -2x$, khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Nếu $m \ne 0$ thì phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc hai có $a.c = 3m.(-m) = -3m^2 < 0$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu, suy ra hàm số luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Khi đó hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ là $x = \frac{2m + 1 \pm \sqrt{7m^2 + 4m + 1}}{3m}$.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$\begin{cases} m < 0 \\ \frac{2m + 1 - \sqrt{7m^2 + 4m + 1}}{3m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2m + 1 - \sqrt{7m^2 + 4m + 1} < 3m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \sqrt{7m^2 + 4m + 1} > 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 6m^2 + 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \vee m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$

5. $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = m$. $\Delta' = m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$

$|x_1 - x_2| \ge 8 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \ge 64 \Leftrightarrow m^2 - m - 16 \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{1 - \sqrt{65}}{2}$ hoặc $m \ge \frac{1 + \sqrt{65}}{2}$

6. Theo bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m < 2 \\ m = \pm\frac{\sqrt{14}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

7. Để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình $g(x) = x^2 + 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 khi đó $m < 4$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=-4, x_1.x_2=m$.

$$x_1^2+x_2^2=-6\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2=-6\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}\Rightarrow m=2$$

8. Ta có: $y'=\frac{x^2-2m^2+5m-3}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}, x\neq 0, g(x)=x^2-2m^2+5m-3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x\in(0;2m)\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1, x_2\,(x_1<x_2)$ thoả $x_1<0<x_2<2m\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<1$ hoặc $m>\frac{3}{2}$

9. Ta có: $y'=3x^2-2(m+3)x+2m-1\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2(m+3)x+2m-1=0$ (1)

Hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $|x_{CD}.x_{CT}|=1\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1.x_2|=1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+15>0\\ |P|=\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{2m-1}{3}\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-1\end{array}\right.$

10. Ta có $y'=\frac{2x^2-4mx+2m}{(x-m)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m=0$ (1)

Đồ thị hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác m $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<0\end{array}\right.$.

Vì đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình là: $y=4x-3$ nên $|y(x_1)-y(x_2)|>8\Leftrightarrow|x_1-x_2|>2\Leftrightarrow m<\frac{1-\sqrt{5}}{2}, m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2:

1.* $m=0$. Khi đó hàm số cho trở thành $y=\frac{x}{x}=\begin{cases}x\neq 0\\ 1\end{cases}$, hàm số này không có cực trị, do vậy $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$x=-m$ là nghiệm của tử số $mx^2+x+m\Leftrightarrow m^3=0\Leftrightarrow m=0$ (bị loại)

$m\neq 0$, $y'=0\Leftrightarrow mx^2+2m^2x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-2m$ hàm số cho có hai cực trị

$|y(x_2)-y(x_1)|\leq 4\Leftrightarrow|y(0)-y(-2m)|\leq 4\Leftrightarrow|1-(1-4m^2)|\leq 4\Leftrightarrow 4m^2\leq 4\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq m\leq 1\\ m\neq 0\end{cases}$.

2. $m=2$

4. Hàm số có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-2m+1>0\\ S=2m>0\\ P=2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ m\neq 1\end{cases}.$$

Bài 3:

1. $y'=0$ có 2 nghiệm thỏa mãn: $x_1<x_2<1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4m^2-m-5>0\\ (x_1-1)+(x_2-1)<0\\ (x_1-1).(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<\frac{7}{5}$

2. Ta có: $y'=mx^2+2(m-2)x+m-1$; $y'=0\Leftrightarrow mx^2+2(m-2)x+m-1=0$ (1)

Đặt $t=x-1\Rightarrow x=t+1$, thay vào (1) ta được:

$$m(t+1)^2+2(m-2)(t+1)+m-1=0\Leftrightarrow mt^2+4(m-1)t+4m-5=0$$

(1) có 2 nghiệm phân biệt bé hơn 1 $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<\frac{4}{3}$.

3. Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=m^2-10m+16>0\Leftrightarrow m<2$ hoặc $m>8$ (1)

Với $m<2$ hoặc $m>8$ hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 đồng thời

$$x_1+x_2=-2m,\ x_1.x_2=2(5m-8).$$

Để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 bé hơn 1 tức phải có:

$$\begin{cases}x_1<1\\ x_2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2<2\\ (x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2<2\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{5}{4}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{5}{4}<m<2$ hoặc $m>8$ là giá trị cần tìm.

4. $3x^2-6(m+1)x+3m^2+7m-1=0$ (1)

Hàm có cực trị $\Leftrightarrow\Delta=-3m+12>0\Leftrightarrow m<4$, khi đó (1) có hai nghiệm

$$x_1=\frac{3(m+1)-\sqrt{12-3m}}{3},\ x_2=\frac{3(m+1)+\sqrt{12-3m}}{3}.$$

Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại x_1, do vậy yêu cầu bài toán thỏa mãn

$$\Leftrightarrow x_1<1\Leftrightarrow 3m<\sqrt{12-3m}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ \begin{cases}m\geq 0\\ 3m^2+m-4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<1.$$

5. $y'=3x^2-6x+6m+3=3(x^2-2x+2m+1)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2-2x+2m+1=0$ (1)

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2 $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=1-(2m+1)=-2m>0\Leftrightarrow m<0$.

Khi đó hai nghiệm của (1) là $x_1=1-\sqrt{-2m}$, $x_2=1+\sqrt{-2m}$.

Vì $x_1<x_2$ do đó cả hai nghiệm này lớn hơn -2 khi và chỉ khi $x_1>-2$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$x_1 > -2 \Leftrightarrow 1-\sqrt{-2m} > -2 \Leftrightarrow \sqrt{-2m} < 3 \Leftrightarrow -2m < 9 \Leftrightarrow m > -\frac{9}{2}$.

Vậy các giá trị của m cần tìm là $m \in \left(-\frac{9}{2};0\right)$.

6. Đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9(4-m) > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

$$y_1 - y_2 = (x_1-x_2)[x_1^2+x_2^2+x_1x_2-6(x_1+x_2)+3m]$$
$$=(x_1-x_2)[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-6(x_1+x_2)+3m]$$

$$\frac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_1x_2+2)}<0 \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-x_1x_2-6(x_1+x_2)+3m}{x_1x_2+2}<0 \quad (*)$$

Vì $\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1.x_2=m\end{cases}$ nên $(*) \Leftrightarrow \frac{16-m-24+3m}{m+2}<0 \Leftrightarrow \frac{2m-8}{m+2}<0 \Leftrightarrow -2<m<4$

Bài 4: Ta có: $y' = x^2-(m+4)x+2m+5$ và $y'=0 \Leftrightarrow m = g(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$

1. $-\frac{10}{3}<m<-2$ hoặc $m>2$
2. $m \le -\frac{10}{3}$
3. $m<-\frac{5}{2}$ hoặc $m>2$
4. $m<-2$ hoặc $2<m<\frac{5}{2}$
5. $2<m<\frac{10}{3}$
6. $-2\le m\le 2$

Bài 5: Đặt $t=x-1 \Rightarrow x=t+1$ ta được: $y'=g(t)=t^2+2(1-m)t+m^2-3m+2$

1. Hàm số cho có cực trị trong khoảng $(-\infty;1) \Leftrightarrow f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(-\infty;1) \Leftrightarrow g(t)=0$ có nghiệm $t<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P<0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ S<0\\ P\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-3m+2<0\\ \begin{cases}m-1\ge 0\\ 2m-2<0\\ m^2-3m+2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 1<m<2$. Vậy: Với $1<m<2$ thì hàm số (1) có cực trị trong khoảng $(-\infty;1)$

2. Hàm số cho có cực trị trong khoảng $(1;+\infty) \Leftrightarrow f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(1;+\infty) \Leftrightarrow g(t)=0$ có nghiệm $t>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P<0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ S>0\\ P\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-3m+2<0\\ \begin{cases}m-1\ge 0\\ 2m-2>0\\ m^2-3m+2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

3. Có hai cực trị x_1,x_2 thoả $x_1<1<x_2 \Leftrightarrow g(t)=0$ có hai nghiệm t_1,t_2 thoả $t_1<0<t_2 \Leftrightarrow P<0 \Leftrightarrow m^2-3m+2<0 \Leftrightarrow 1<m<2$

4. Có hai cực trị x_1,x_2 thoả $1<x_1<x_2 \Leftrightarrow g(t)=0$ có hai nghiệm t_1,t_2 thoả $0<t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-1>0\\ m^2-3m+2>0\\ 2m-2>0\end{cases} \Leftrightarrow m>2$

Bài 6: $y'=x^2-2ax-3a$. Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta = 4a^2+12a>0 \Leftrightarrow a<-3$ hoặc $a>0$ (*). Khi đó $x_1+x_2=2a$, $x_1x_2=-3a$.

Ta có: $x_1^2+2ax_2+9a = 2a(x_1+x_2)+12a = 4a^2+12a>0$

Tương tự: $x_2^2+2ax_1+9a = 4a^2+12a>0$

Do đó: $\frac{4a^2+12a}{a^2}+\frac{a^2}{4a^2+12a}=2 \Leftrightarrow \frac{4a^2+12a}{a^2}=1 \Leftrightarrow 3a(a+4)=0 \Leftrightarrow a=-4$

Bài 7: Các điểm cực trị là: A(0; 2), B(2;−2). Xét biểu thức $g(x,y)=3x-y-2$ ta có:

$g(x_A,y_A)=3x_A-y_A-2=-4<0$; $g(x_B,y_B)=3x_B-y_B-2=6>0$

$\Rightarrow$ 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng d: $y=3x-2$.

Do đó MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ 3 điểm A, M, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của d và AB.

Phương trình đường thẳng AB: $y=-2x+2$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}y=3x-2\\ y=-2x+2\end{cases} \Leftrightarrow \left\{x=\frac{4}{5}; y=\frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)\right.$

Bài 8:

1. Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu hai lần qua nghiệm x, tức $g(x)=mx^2+4mx-m-11=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 khác -2.

Khi đó: $\begin{cases}m\ne 0\\ g(-2)\ne 0\\ \Delta'_g>0\end{cases}$, giải hệ ta được: $m<-\frac{11}{5}$ hoặc $m>0$.

Theo bài toán $y_1.y_2>0$, trong đó $y_1=2mx_1-4$, $y_2=2mx_2-4$.

$y_1.y_2 = 4m^2x_1.x_2-8m(x_1+x_2)+16=-4m^2-12m+16$

$y_1.y_2>0 \Leftrightarrow -4<m<1$. Đối chiếu điều kiện, suy ra $-4<m<-\frac{11}{5}$ hoặc $0<m<1$.

2. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt, khi và chỉ khi phương trình $\frac{mx^2-4x+m+3}{x+2}=-3(x+10)$ có hai nghiệm phân biệt, hay phương trình $(m+3)x^2+32x+m+63=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 tức

$$m\ne -3 \text{ và } m\ne -\frac{11}{5} \text{ và } -67<m<1.$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Khi đó, tung độ của A và B là $y_1 = -3(x_1 + 10)$ và $y_2 = -3(x_2 + 10)$ suy ra:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{96}{m+3} - 60 \\ y_1.y_2 = 9\left(101 - \dfrac{260}{m+3}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{2(y_1.y_2 - 909)}{195} + \frac{y_1 + y_2 + 60}{4} = 0$$

Bài 9:

1. Bài toán trở thành: " tìm m để phương trình $2x^2 + 4x + 1 = m$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0$". Xét $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$, $x \in (-2;0)$.

Ta có $g'(x) = 4x + 4$, trên khoảng $(-2;0)$: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập bảng biến thiên và suy ra $-1 < g(x) < 1$, cùng tính chất tam thức bậc 2, ta có:

$-1 < m < 1$

2. $y' = 3\left[x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m\right]$. Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow$ $x = m$ hoặc $x = m+2$ với $\forall m \in \mathbb{R}$. Giả sử $A(m; m^3 + 3m^2 - 12m + 8)$, $B(m+2; m^3 + 3m^2 - 12m + 4)$

Dễ thấy $AB = 2\sqrt{5}$, do đó theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $AM + BM \ge AB = 2\sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi tồn tại số thực $k > 0$ sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Từ đây, ta tìm được $m = 2$.

3. $m < -1$ hoặc $\frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$

Dạng 4: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU CÙNG ĐIỂM K TẠO THÀNH TAM GIÁC THỎA MÃN TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ

Bài 1.

1. Đk: $m < -\frac{1}{3}$. $A(0;-3)$; $B\left(\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right)$; $C\left(-\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right)$

ΔABC cân tại A; $BC = \frac{2}{3}AB \Leftrightarrow 9.4\left(\frac{-3m-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-3m-1}{2} + \frac{(3m+1)^4}{16}\right) \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$

2. Gọi $A(0;2m-1)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$

Chu vi tam giác ABC: $P = \sqrt{4m} + 2\sqrt{m + m^4}$, $P = 4(1 + \sqrt{65}) \Leftrightarrow m = 4$

3. Hàm số có cực tiểu tại $x = 3$ nên có $y'(3) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{(3+1)^2} = 0 \Rightarrow b = -16$

Khi đó $y' = 1 - \frac{16}{(x+1)^2}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = -5$ hoặc $x = 3$

Hai điểm cực trị của hàm số $A(-5;a-9)$, $B(3;a+7)$

Dễ dàng kiểm tra được điểm B $(3; a+7)$ là điểm cực tiểu.

Phương trình đường thẳng qua hai cực trị: $(\Delta): y = 2x + a + 1$

Gọi M, N là giao điểm của (Δ) với hai trục tọa độ nên $M(0;a+1)$, $N\left(-\frac{a+1}{2};0\right)$

$\overrightarrow{OM} = (0;a+1) \Rightarrow OM = |a+1|$, $\overrightarrow{ON} = \left(-\frac{a+1}{2};0\right) \Rightarrow ON = \left|\frac{a+1}{2}\right|$

$P_{\Delta OMN} = ON + OM + MN = ON + OM + \sqrt{OM^2 + ON^2}$

$= |a+1| + \frac{|a+1|}{2} + \sqrt{|a+1|^2 + \frac{|a+1|^2}{4}} = (1+\sqrt{5})^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)|a+1| = 6 + 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |a+1| = 4 \Leftrightarrow a = -5$ hoặc $a = 3$

Bài 2.

1. $A(m+1;m-3)$, $B(m-1;m+1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (m+1;m-3)$, $\overrightarrow{OB} = (m-1;m+1)$.

ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 2$.

2. $A(0;m^2 - 5m + 5)$, $B(\sqrt{2-m}; 1-m)$, $C(-\sqrt{2-m}; 1-m)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi ΔABC vuông tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1$

Bài 3.

1. $A(m-1; -3m+6)$, $B(m+1; -3m+2)$.

$AB = \sqrt{(m+1-m+1)^2 + (-3m+6+3m-2)^2} = 2\sqrt{5}$

Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A, B là: $\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$

$\frac{x-m-1}{-2} = \frac{y-(2-3m)}{4} \Leftrightarrow 2x + y + m - 4 = 0 \Rightarrow d(O,d) = \frac{|m-4|}{\sqrt{5}}$.

Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d(O,d) = \frac{1}{2}\frac{|m-4|}{\sqrt{5}}.\sqrt{20} = |m-4|$.

$S_{OAB} = 4 \Leftrightarrow |m-4| = 4 \Leftrightarrow m = 0, m = 8$

2. $A(0;1)$, $B(m; 1-m^4)$, $C(-m; 1-m^4)$.

Ta thấy $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông cân

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(m^2 + m^8) = 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. $A(0;m+1), B\left(\sqrt{m(m-1)};-m^4+2m^3-m^2+m+1\right)$,

$C\left(-\sqrt{m(m-1)};-m^4+2m^3-m^2+m+1\right)$.

Tam giác ΔABC cân tại A nên tam giác này vuông thì:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow m(m-1)=(m^4-2m^3+m^2)^2=\left[m(m-1)\right]^4$

$\Leftrightarrow m^3(m-1)^3=1 \Leftrightarrow m(m-1)=1 \Leftrightarrow m^2-m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

4. $m\neq 0$ thì hàm số có 2 cực trị có hoành độ $x=1\pm m$. Tam giác OAB vuông tại O khi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$ với $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

Đường thẳng qua A,B là $y=2m^2x-2\left(m^2+1\right)$.

Đáp số: $m=\pm 1$.

Bài 4.

1. $A(0;m)$ và $B(-2;m+4)$, $\overrightarrow{OA}=(0;m)$, $\overrightarrow{OB}=(-2;m+4)$. Để $\widehat{AOB}=120^0$ thì

$$\cos AOB=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2\left(4+(m+4)^2\right)}}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2\left(4+(m+4)^2\right)}=-2m(m+4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4<m<0\\ 3m^2+24m+44=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4<m<0\\ m=\frac{-12\pm2\sqrt{3}}{3}\end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{-12+2\sqrt{3}}{3}$$

2. $A(0;m^2+m)$, $B\left(\sqrt{-m};m\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};m\right)$

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{-m};-m^2)$; $\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{-m};-m^2)$. ΔABC cân tại A nên góc $120°$ chính là $\widehat{A}$.

$$\widehat{A}=120° \Leftrightarrow \cos A=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m}+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \frac{m+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2m+2m^4=m-m^4 \Leftrightarrow 3m^4+m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa $m<0$.

Bài 5.

1. $m\le 0 \Rightarrow y'=0$ có 1 nghiệm, nên hàm số có 1 cực trị.

$m>0 \Rightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó, nên hàm số có 3 cực trị $A(0;-4m)$, $B\left(-\sqrt{2m};4m^2-4m\right)$, $C\left(\sqrt{2m};4m^2-4m\right)$

Vì tam giác ABC cân tại A và B,C đối xứng nhau qua Oy

H là trực tâm tam giác ABC khi $\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp AC\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0$ (*).

Ta có: $\overrightarrow{BH}=\left(\sqrt{2m};-4m^2+4m+\frac{31}{4}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{2m};4m^2\right)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 2m+4m^2\left(-4m^2+4m+\frac{31}{4}\right)=0$ hay $8m^3-8m^2-\frac{31}{2}m-1=0$, phương trình có nghiệm $m=2$ thỏa $m>0$

2. $A(0;2), B(-\sqrt{m};-m^2+2), C(\sqrt{m};-m^2+2)$. Vì tam giác BAC cân tại A nên $OA\perp BC$ nên O là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow OB\perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0$ (*).

$\overrightarrow{OB}=(-\sqrt{m};-m^2+2)$, $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{m};-m^2)$

Nên $(*) \Leftrightarrow -m+m^2(m^2-2)=0 \Leftrightarrow m^3-2m-1=0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m^2-m-1)=0 \Leftrightarrow m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm.

3. $A(2;9m)$, $B(2m;-4m^3+12m^2-3m+4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases}2+2m-1=0\\ -4m^3+12m^2+6m+4-\frac{9}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (thoả (*)).

4. Khảo sát hàm: $f(x)=\frac{2x^3+2}{x}$ ta tìm được $m>3\sqrt[3]{2}$.

Cũng từ phương trình có: $x^3+1=\frac{mx}{2}$ suy ra: $y=-\frac{mx^2}{2}+3x+m$ là parabol đi qua ba điểm cực trị. Gọi ba điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2);C(x_3;y_3)$

Tam giác ABC nhận O làm trọng tâm $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ y_1+y_2+y_3=0\end{cases}$ hay:

$-\frac{m}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+3(x_1+x_2+x_3)+3m=0$ (*)

Do: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=m$

nên có: $(*) \Leftrightarrow -\frac{m^2}{2}+3m=0 \Rightarrow m=6$

Bài 6. $A\left(1;m^3+3m-1\right), B\left(m;3m^2\right)$.

1. $AB=\sqrt{2} \Rightarrow AB^2=2 \Leftrightarrow \left[(m-1)^2\right]^3+(m-1)^2=2 \Leftrightarrow (m-1)^2-1=0$

2. Tam giác ABC vuông tại C, khi đó $AC\perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0$ (*)

$\overrightarrow{AC}=\left(3;-m^3-3m+1\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(4-m;-3m^2\right)$

Đẳng thức $(*) \Leftrightarrow 3(4-m)+\left(-m^3-3m+1\right)\left(-3m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (m+1)\left[m^2\left(m^2-m+1\right)+3m^2-5m+4\right]=0$ (**)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Dễ thấy $m^2\left(m^2-m+1\right)\ge 0$ và $3m^2-5m+4>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $(**)\Leftrightarrow m+1=0$ hay $m=-1$ thỏa mãn đề bài

Bài 7. $A\left(0;6-\frac{m^2}{2}\right)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{m}{2}};6-\frac{3m^2}{4}\right)$ và $C\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};6-\frac{3m^2}{4}\right)$.

1. Cách 1: $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}\right)$ và $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}\right)$

Tam giác ABC vuông tại A khi $AB\perp AC$ hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow\left(-\sqrt{-\frac{m}{2}}\right)\left(\sqrt{-\frac{m}{2}}\right)+\left(-\frac{m^2}{4}\right)\left(-\frac{m^2}{4}\right)=0\Leftrightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{m^3}{8}+1\right)=0$, phương trình này có nghiệm $m=-2$ (thỏa $m<0$) hoặc $m=0$ không thỏa mãn.

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC; do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI=\frac{BC}{2}$

$\rightarrow \frac{m^2}{4}=\sqrt{-\frac{m}{2}}$ tức $\frac{m^2}{4}=\sqrt{-\frac{m}{2}}$ hay $\frac{m^4}{16}+\frac{m}{2}=0\Leftrightarrow\frac{m}{2}\left(\frac{m^3}{8}+1\right)=0\Rightarrow m=-2$

2. Diện tích tam giác ABC bằng 32 khi và chỉ khi

$\frac{BC.AI}{2}=32$ hay $\sqrt{-\frac{m}{2}}.\frac{m^2}{4}=32$ $(*)$.

Đặt $u=\sqrt{-\frac{m}{2}}\Rightarrow m=-2u^2$, khi đó phương trình $(*)$ trở thành

$u^5=32=2^5\Rightarrow u=2$ tức $m=-2(2)^2=-8$ thỏa mãn.

3. Ta có: $OA=\left|6-\frac{m^2}{2}\right|$ và $BC=2\sqrt{-\frac{m}{2}}$.

Diện tích tứ giác OABC bằng 52 khi và chỉ khi

$\frac{OA.BC}{2}=52$ tức $\left|6-\frac{m^2}{2}\right|.2\sqrt{-\frac{m}{2}}=104$

Cách 1: Bình phương 2 vế và rút gọn ta được phương trình:

$m^5-24m^3+144m+21632=0$

$\Leftrightarrow(m+8)\left(m^4-8m^3+40m^2-320m+2704\right)=0\Leftrightarrow m=-8$ thỏa mãn

Dễ dàng chứng minh được với mọi $m<0$ thì

$m^4-8m^3+40m^2-320m+2704=m^2\left(m^2+40\right)-8m\left(m^2+40\right)+2704>0$

Cách 2: $\left|6-\frac{m^2}{2}\right|.2\sqrt{-\frac{m}{2}}=104\Leftrightarrow\left|12-m^2\right|.\sqrt{-\frac{m}{2}}=104$ $(*)$

Đặt $t=\sqrt{-\frac{m}{2}}$, $t\ge 0$, khi đó $(*)$ trở thành $\left|12-4t^4\right|.t=104$ $(**)$

TH1: $0<t\le\sqrt[4]{3}\Rightarrow 12-4t^4\ge 0$, phương trình $(**)$ trở thành $\left(12-4t^4\right).t=104$.

Dễ dàng chứng minh được: $f(t)=\left(12-4t^4\right).t-104<0$ với mọi $t\in\left(0;\sqrt[4]{3}\right]$.

TH2: $t>\sqrt[4]{3}\Rightarrow 12-4t^4<0$, phương trình $(**)$ trở thành $\left(4t^4-12\right).t=104$.

Xét hàm số $f(t)=\left(4t^4-12\right).t-104=4t^5-12t-104$ với $t>\sqrt[4]{3}$, ta có

$f'(t)=20t^4-12=4\left(5t^4-3\right)$

Vì $t>\sqrt[4]{3}$ nên $5t^4-3>12\Rightarrow f'(t)>0$, mọi $t>\sqrt[4]{3}$, suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt[4]{3};+\infty\right)$; hơn nữa $\lim\limits_{x\to\left(\sqrt[4]{3}\right)^+}f(t)<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(t)>0$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số $f(t)$ cắt trục hoành tại 1 giao điểm $t\in\left(\sqrt[4]{3};+\infty\right)$ và $f(2)=0$, do đó phương trình $\left(4t^4-12\right).t=104$ có nghiệm duy nhất $t=2$ tức $\sqrt{-\frac{m}{2}}=2$ hay $m=-8$.

4. Tứ giác ABOC là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}$ $(*)$

Ta có: $\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};\frac{m^2}{4}\right)$ và $\overrightarrow{OC}=\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};6-\frac{3m^2}{4}\right)$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{-\frac{m}{2}}=\sqrt{-\frac{m}{2}}\\ \frac{m^2}{4}=6-\frac{3m^2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m^2=6\Rightarrow m=-\sqrt{6}$ thỏa $m<0$.

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN, HÌNH BÌNH HÀNH, HÌNH THOI...

Bài 1:

1. $m>0$ hàm số có 3 cực trị $A(0;m)$, $B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};m-m^2\right)$

$BC=2\sqrt{m}$, $d(A,BC)=\left|y_C-y_A\right|=m^2\Rightarrow S_{ABC}=m^2\sqrt{m}$,

$p=\sqrt{m}+\sqrt{m+m^4}$ và $S=pr\Leftrightarrow m^2=1+\sqrt{1+m^3}\Rightarrow m=2$

2. Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

Với $m>0$ có 3điểm cực trị $A(0;2)$, $B\left(-\sqrt{m};2-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};2-m^2\right)$.

Vì B,C đối xứng nhau qua Oy do đó tâm I đường tròn ngoại tiếp đi qua 4 điểm A,B,C,D nằm trên trục Oy và $I(0;y_0)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Khi đó có hệ: $\begin{cases} IA = ID \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-y_0)^2 = \dfrac{9}{25} + \left(\dfrac{9}{5} - y_0\right)^2 \\ (2-y_0)^2 = m + (2 - m^2 - y_0)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ m = 1, m = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$

Bài 2:

1. $A(0; 2m+1)$, $\left(B\left(\sqrt{m+1}; -m^2\right), C\left(-\sqrt{m+1}; -m^2\right)\right.$ với $m > -1$

Vì $A \in Oy$, B và C đối xứng với nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A và tâm của đường tròn (γ) ngoại tiếp tam giác ABC thuộc Oy, $I \in Oy \Rightarrow I(0; a)$.

Bán kính của đường tròn (γ) bằng 1 $\Leftrightarrow IA = 1$ và $IB = 1$

$IA = 1 \Leftrightarrow |2m + 1 - a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1-a = 1 \\ 2m+1-a = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2m \\ a = 2m+2 \end{array}\right.$

$IB = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{m+1}\right)^2 + (a+m^2)^2 = 1 \Leftrightarrow m + (a+m^2)^2 = 0$ (3).

Thay $a = 2m$ vào (3) ta được phương trình

$m + (2m+m^2)^2 = 0 \Leftrightarrow m[1 + (2+m)^2 m] = 0 \Leftrightarrow m(m+1)(m^2+3m+1) = 0.$

Thay $a = 2m+2$ vào (3) ta được phương trình

$m + (m^2+2m+2)^2 = 0 \Leftrightarrow m + [(m+1)^2+1]^2 = 0$ (4).

Vì $m > -1$ nên $(m+1)^2 + 1 > 1 \Rightarrow m + [(m+1)^2+1] > 0$ $\Rightarrow$ Phương trình (4) vô nghiệm

2. $A(0; m), B\left(-\sqrt{m}; m - m^2\right), C\left(\sqrt{m}; m - m^2\right)$

Gọi S, p, r lần lượt là diện tích, nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có $S = p.r = p$ (do $r = 1$), $BC = 2\sqrt{m}$, $d(A, BC) = |y_C - y_A| = m^2$.

Suy ra diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2} BC.d(A, BC) = \sqrt{m}.m^2$

Nửa chu vi tam giác ABC : $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}$

$S = p \Leftrightarrow \sqrt{m}.m^2 = \sqrt{m+m^4} + \sqrt{m} \Leftrightarrow \sqrt{m}.m^2 = \sqrt{m}\left(\sqrt{1+m^3} + 1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} = m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \ge 0 \\ 1 + m^3 = m^4 - 2m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

3. $A(0; 2m)$, $B\left(\sqrt{m}; -m^2 + 2m\right)$, $C\left(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m\right)$ (Đk $m > 0$).

Gọi d là đường trung trực của AB

Phương trình đường thẳng (d): $\sqrt{m}\left(x - \dfrac{\sqrt{m}}{2}\right) - m^2\left(y + \dfrac{m^2}{2} - 2m\right) = 0$

Suy ra $I\left(0; -\dfrac{1}{2m} - \dfrac{m^2}{2} + 2m\right)$.

Tứ giác ABOC nội tiếp khi và chỉ khi IA = IB = OI, hay I là trung điểm AO tức $m = -\dfrac{1}{2m} - \dfrac{m^2}{2} + 2m$, quy đồng và rút gọn ta được: $(m-1)(m^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, đối chiếu điều kiện suy ra $m = 1$ và $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy, $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý:

1. Dễ thấy tam giác ABO vuông tại B $(m > 0)$ nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ m > 0 \end{cases}$ tương đương với $\begin{cases} m - m^2(2m - m^2) = 0 \\ m > 0 \end{cases}$, giải hệ ta được $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện, suy ra $m = 1$, $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Tứ giác ABOC nội tiếp khi và chỉ khi $\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$.

Bài 3. $A(0; m-1), B\left(\sqrt{m}; m - m^2 - 1\right), C\left(-\sqrt{m}; m - m^2 - 1\right)$. Đk: $m > 0$

Gọi H là trung điểm của BC. Giả thiết ta có $AB = 2.\sin C = 2.\dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB^2 = 2AH$

Do đó $m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0$

Kết hợp với điều kiện ta có $m = 1, m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn

Bài 4.: $A\left(0; \dfrac{4}{3}(m+1)^3\right)$, $B(2(m+1); 0)$. (C) có tâm $I(2; 0)$, bán kính $R = 1$.

$IA = \sqrt{4 + \dfrac{16}{9}(m+1)^6}$, $IB = \sqrt{4m^2}$. A, B nằm về hai phía của (C)

$\Leftrightarrow (IA^2 - R^2)(IB^2 - R^2) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{1}{2}$ (2)

Bài 6:

1. $A(0; 2m+1)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{3m-1}{2}}; \dfrac{-9m^2 + 14m + 3}{4}\right)$, $C\left(-\sqrt{\dfrac{3m-1}{2}}; \dfrac{-9m^2 + 14m + 3}{4}\right)$

Đk: $\left(m > \dfrac{1}{3}\right)$

Vì tam giác ABC cân tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên Oy, suy ra $I(0; a)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Gọi M là trung điểm của AC, suy ra $M\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3m-1}{2}};\frac{-9m^2+22m+7}{8}\right)$.

Ta có: $\begin{cases} IA^2 = ID^2 \\ \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2m-1)^2 = 49+(a-3)^2 & (1) \\ \frac{3m-1}{4}+\left(\frac{9m^2-22m-7}{8}+a\right)\frac{9m^2-6m+1}{4} = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow a = \frac{4m^2+4m-57}{4(m-1)}$ thay vào (2) ta có được:

$27m^4-78m^3+92m^2-336m+99=0$

2. $m \neq 3$ thì hàm số cho có 2 cực trị, giả sử $x_A = 1$, $x_B = m-2$

OADB là hình bình hành nên trung điểm AB cũng là trung điểm OD.

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{x_D}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow m = 4 \Rightarrow A\left(1;\frac{11}{6}\right), B\left(2;\frac{5}{3}\right)$

Bài 7: Điểm cực đại $M(m-1;2-3m)$ chạy trên đường thẳng cố định: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-3t \end{cases}$

Điểm cực tiểu $N(m+1;-2-3m)$ chạy trên đường thẳng cố định: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-3t \end{cases}$

Bài 8: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1 = m-1, x_2 = m+1$. Đặt $A(x_0;y_0)$. Giả sử ứng với giá trị $m=m_1$ thì A là điểm cực đại và ứng với giá trị $m=m_2$ thì A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Ta có: $\begin{cases} x_0 = m_1-1 \\ y_0 = -m_1^2+m_1-2 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = m_2+1 \\ y_0 = -m_2^2+m_2+2 \end{cases}$.

Theo bài toán, ta có: $\begin{cases} m_1-1 = m_2+1 \\ -m_1^2+m_1-2 = -m_2^2+m_2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1-m_2 = 2 \\ m_1+m_2 = -1 \end{cases}$

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bài 1:

1. $y = \begin{cases} 3-x+x^2-4x+3 \text{ khi } x^2-4x+3 \geq 0 \\ 3-x-x^2+4x-3 \text{ khi } x^2-4x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} x^2-5x+6 \text{ khi } x \leq 1, x \geq 3 \\ -x^2+3x \text{ khi } 1<x<3 \end{cases}$

Với $x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$, $y' = 2x-5$ hay $y' = 2(x-2)-1$

Ta thấy: $y'<0$ với $x \in (-\infty;1$ và $y'>0$ với $x \in (3;+\infty)$

Với $x \in (1;3)$, $y' = -2x+3$ và $y'=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (1;3)$

Tại $x=1$: $y'(1^+) = -2(1)+3 = 1, y'(1^-) = 2(1)-5 = -3 \Rightarrow y'(1)$ không tồn tại

Tại $x=3$: $y'(3^+) = 2(3)-5 = 1$, $y'(3^-) = -2(3)+3 = -3 \Rightarrow y'(3)$ không tồn tại

$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}+\left|1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right|\right) = +\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra $\min_{x\in\mathbb{R}} y = 0$, $\max_{x\in\mathbb{R}} y$ không tồn tại.

2. $y = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}+x-1 \text{ khi } x \in [1;2] \\ \sqrt{4-x^2}+1-x \text{ khi } x \in [-2;1) \end{cases}$

• $x \in (1;2)$, $y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}+1 = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2}-x=0 \\ x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} = x \\ x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 = x^2 \\ x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

• $x \in (-2;1)$, $y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}-1 = \frac{-x-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;1) \\ \sqrt{4-x^2} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;1) \\ -x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$

Tại $x=1$: $y'(1^+) = -\frac{1}{\sqrt{3}}+1$, $y'(1^-) = -\frac{1}{\sqrt{3}}-1 \Rightarrow y'(1)$ không tồn tại.

Tại $x=2$, $x=-2$ thì y' không xác định.

Từ bảng biến thiên trên suy ra $\max_{x\in D} y = 2\sqrt{2}+1$, $\min_{x\in D} y = 1$

Bài 2:

1. $\max f(x) = f(-1) = 8$; $\min f(x) = f(\pm\sqrt{5}) = 0$.

2. Ta có: $y' = 1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\leq 2 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. $\max y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$; $\min y = y(-2) = -2$.

3. Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

$y' = 1+\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\sqrt{2x-x^2}+1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, x \in (0;2)$

Tại hai điểm $x=0$, $x=2$ thì y' không tồn tại.

$y'=0, x \in (0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;2) \\ \sqrt{2x-x^2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<2 \\ 2x-x^2 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<2 \\ 2x^2-4x+1=0 \end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

$y(0)=2$, $y(2)=4$, $y\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=3+\sqrt{2}$ suy ra $\max_{x\in D} f(x)=3+\sqrt{2}$, $\min_{x\in D} f(x)=2$.

4. $\min_{x\in[0;3]} y=-12$, $\max_{x\in[0;3]} y=-3\sqrt{13}$

Bài 3:

1. $\max_{x\in R} y=\frac{2}{3}$, $\min_{x\in R} y=\frac{2}{5}$. 2. $\max f(x)=7$, $\min f(x)=\frac{5}{2}$.

Chú ý: Với bài toán trên ta có thể giải bằng phương pháp miền giá trị như sau:

$y=\frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} \Leftrightarrow (20-3y)x^2+2(5-y)x+3-y=0$ (1)

* $y=\frac{20}{3} \Rightarrow$ (1) có nghiệm

* Nếu $y\neq\frac{20}{3} \Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=-2y^2+19y-35\geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\leq y\leq 7$.

Bài 4:

1. $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.

Bình phương hai vế ta có phương trình hệ quả

$(2x+1)^2[(2x-1)^2+3]=(2x-1)^2[(2x+1)^2+3]$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow x=0$ thay vào (1) ta thấy $1=-1$ vô lý.

Vậy phương trình $y'=0$ vô nghiệm hay y' không đổi dấu trên R,

mà $y'(0)=1>0 \Rightarrow y'>0 \ \forall x\in R$.

2. Đk: $-2\leq x\leq 5$. Xét trên miền $-2<x<5$, ta có: $y=\sqrt{25-(x-2)^2}-\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}$,

$$y'=\frac{-(x-2)}{\sqrt{25-(x-2)^2}}+\frac{x-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=0 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}=\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{25-(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2<x<5\\ (x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geq 0\\ (x-2)^2\left(\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\left(25-(x-2)^2\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(-2;\frac{3}{2}\right]\cup[2;5)\\ 25\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}(x-2)^2\end{cases}$$

Chú ý: Vì $(-x^2+4x+21)-(-x^2+3x+10)=x+11>0\Rightarrow y>0$

$\Rightarrow y^2=(x+3)(7-x)+(x+2)(5-x)-2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)}$

$=\left(\sqrt{(x+3)(5-x)}-\sqrt{(x+2)(7-x)}\right)^2+2\geq 2$.

Bài 5:

1. * $y(0)=3$, $y(4)=-\frac{23}{3}$, $y(3)=-\frac{21}{2}$

* y liên tục trên $[0;4]$ và có đạo hàm trên $(0;4)$.

2. Đặt $t=x^2, x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;1]$. Hàm số đã cho viết lại $f(t)=t^3+4(1-t)^3$, $t\in[0;1]$

Ta có $f'(t)=3t^2-12(1-t)^2=3(-3t^2+8t-4)$

$f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\\ t=2\end{array}\right.$ và $f(0)=4, f(1)=1$

3. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$

$y=\frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{8x^2+1}=\frac{9x^2+1-x^2}{(8x^2+1)\left(\sqrt{9x^2+1}-x\right)}=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi hàm số

$f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.

Ta tìm nghiệm của phương trình $f'(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$f'(x)=0, x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \sqrt{9x^2+1}=9x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 72x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6\sqrt{2}}$

$\min_{x>0} f(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $x=\frac{1}{6\sqrt{2}}\Rightarrow \max_{x>0} y=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ khi $x=\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất khi $x>0$.

Bài6:

1. $y'=\sqrt{-x^2-2x+3}+(x+3)\frac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

$\rightarrow y'=\frac{-2x^2-6x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-3;1)\\ -2x^2-6x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-3;1)\\ x=0, x=-3\end{cases}\Leftrightarrow x=0$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$\sqrt{45+20x^2}=\sqrt{5(9+4x^2)}=\sqrt{(2^2+1^2)[3^2+(2x)^2]}\overset{BCS}{\geq}|2.3+1.2x|=|6+2x|$

Suy ra $y\geq|6+2x|+|2x-3|$. Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|\geq|a+b|$, ta có

$|6+2x|+|2x-3|=|6+2x|+|3-2x|\geq|6+2x+3-2x|=9$ suy ra $y\geq 9$

$$y=9\Leftrightarrow\begin{cases}(6+2x)(3-2x)\geq 0\\ \frac{2x}{1}=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$$

Dạng 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT LIÊN QUAN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1:

1. Ta có: $y'=1-2\cos 2x$ với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ta tìm nghiệm của phương trình y' trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$$y'=0, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\cos 2x=0\\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$$

$y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt3}{2}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt3}{2}$, $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

2. Đặt $t=\sin x, x\in[0;\pi]\Rightarrow t\in[0;1]$

Hàm số đã cho viết lại: $y=2t-\frac{4}{3}t^3=f(t)$.

Xét $f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có: $f'(t)=2-4t^2$, với mọi $t\in(0;1)$. Ta tìm nghiệm của phương trình y' trên khoảng $(0;1)$. $f'(t)=0, t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-4t^2=0\\ t\in(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt2}$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{2\sqrt2}{3}$, $f(0)=0$, $f(1)=\frac{2}{3}$

$\max\limits_{x\in[0;\pi]}y=\max\limits_{t\in[0;1]}f=f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{2\sqrt2}{3}$ khi $t=\frac{1}{\sqrt2}\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{\sqrt2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

$\min\limits_{x\in[0;\pi]}y=\min\limits_{t\in[0;1]}f=f(0)=0$ khi $t=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\pi$

Bài 2:

1. $y=\dfrac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\dfrac{4-3\sin^2 2x}{4-2\sin^2 2x}$

Đặt $t=\sin^2 2x$, $0\leq t\leq 1$. Khi đó: $y=\frac{4-3t}{4-2t}=g(t)$ với $0\leq t\leq 1$,

Ta có $g'(t)=\frac{-1}{(2-t)^2}<0\Rightarrow\max y=\max\limits_{[0;1]}g(t)=1$, $\min y=\frac{1}{2}$.

2. Đặt $t=\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow|t|\leq 1\Rightarrow y=\sin t+\cos 2t+1=-2\sin^2 t+\sin t+2$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow-\sin 1\leq u\leq\sin 1\Rightarrow y=-2u^2+u+2$

Ta có $y'=-4u+1\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow u=\frac{1}{4}$. $\min y=-2\sin^2 1-\sin 1+2$; $\max y=\frac{17}{8}$.

Bài 3: Đặt $t=\cot x$

$\Rightarrow\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2x=\frac{t^2-1}{t^2+1}\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{(\sin^4 x+2\sin^2 x-1)(\cos^4 x+2\cos^2 x-1)}{(\sin^4 x+1)(\cos^4 x+1)}$

$g(x)=\frac{\sin^4 x\cos^4 x+8\sin^2 x\cos^2 x-2}{\sin^4 x\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+2}=\frac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2}=h(u)$, trong đó

$u=\sin^2 x\cos^2 x$; $0\leq u\leq\frac{1}{4}\Rightarrow h'(u)=2\left[\frac{-5u^2+4u+6}{(u^2-2u+2)^2}\right]>0\quad\forall u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

$\Rightarrow$ hàm số $h(u)$ luôn tăng trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ nên $\max\limits_{u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]}h(u)=h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{25}$

$\min\limits_{u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]}h(t)=h(0)=-1$. Vậy $\max g(x)=\frac{1}{25}$; $\min g(x)=-1$.

Bài 4:

1. Đặt $\sin\frac{x}{2}=t\Rightarrow t\in[0;1]$ ta có hàm số $f(t)=2\sqrt{1-t^2}\left(1+\sqrt6 t\right)$, $t\in[0;1]$

Ta suy ra $\min\limits_{x\in[0;\pi]}y=f(\pi)=0$, $\max\limits_{x\in[0;\pi]}y=\frac{5\sqrt{10}}{4}$

2. $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2=\sin^4 x-\sin^2 x+3$. Đặt $t=\sin^2 x, 0\leq t\leq 1$

Xét hàm số $f(t)=t^2-t+3$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\min y = \min_{t\in[0;1]} f(t) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ $\max y = \max_{t\in[0;1]} f(t) = 3$

3. Ta có : $f'(x) = 1 - 2\cos 2x, -\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

4. Đặt $t = \sin x \Rightarrow f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$, $t \in [-1; 1]$

$f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

$\min f(x) = \min_{t\in[-1;1]} f(t) = 0$ khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\max f(x) = \max_{t\in[-1;1]} f(t) = 1$ khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Vì $|\sin x| + |\cos x| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $y = \frac{\sin^6 x|\cos x| + \cos^6 x|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|} = \frac{|\sin x\cos x|\left(|\sin x|^5 + |\cos x|^5\right)}{|\sin x| + |\cos x|}$

$y = |\sin x\cos x|\left(1 - |\sin x\cos x| - \sin^2 x\cos^2 x\right)$

$y = \frac{-1}{8}|\sin^3 2x| - \frac{1}{4}|\sin 2x|^2 + \frac{1}{2}|\sin 2x|$. Đặt $t = |\sin 2x|; 0 \le t \le 1$

Xét hàm số : $f(t) = \frac{-1}{8}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

6. $y = 2\cos^6 x - \frac{3}{4}\left(2\cos^2 x - 1\right)$. Đặt $t = \cos^2 x, 0 \le t \le 1$

Khi đó $y = g(t) = 2t^3 - \frac{3}{4}(2t-1)$ với mọi $t \in [0;1]$

Bài toán trở thành: tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $g'(t) = 6t^2 - \frac{3}{2}$ với mọi $t \in (0;1)$.Ta tìm nghiệm của phương trình $g'(t)$ trên khoảng $(0;1)$ và $g'(t) = 0, t \in (0;1) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

$\max y = \frac{5}{4}$ khi $x = k\pi$ và $\min y = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

7. Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Khi đó $y = g(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$ với mọi $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Bài toán trở thành: tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(t)$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$ với mọi $t \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

8. $\min y = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \max y = 1$

9. Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1 + \sin x \ge 0 \\ 1 + \cos x \ge 0 \end{cases}$

$\rightarrow y > 0 \Rightarrow y^2 = \sin x + \cos x + 2 + 2\sqrt{\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1}$ (*)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Khi đó (*) viết lại $f(t) = t + 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(t^2 + 2t + 1\right)} = t + 2 + \sqrt{2}|t+1|$

$$f(t) = \begin{cases} \left(1 - \sqrt{2}\right)t + 2 - \sqrt{2}, \text{khi } -\sqrt{2} \le t \le -1 \\ \left(1 + \sqrt{2}\right)t + 2 + \sqrt{2}, \text{khi } -1 < t \le \sqrt{2} \end{cases}$$

Dạng 1: *Chứng minh đồ thị có trục đối xứng*

Bài 1: Ta có $\vec{v} = (3;4)$ là một véc tơ chỉ phương của d_m.

Vì M,N thuộc d_m nên $\overrightarrow{MN} = k.\vec{v}$. Mặt khác, $MN = 5$ nên $k = \pm 1$. Nếu $k = -1$ thì $\overrightarrow{MN} = -\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{v}$. Vì không cần xem xét thứ tự của hai điểm M với N nên ta chỉ cần xét trường hợp $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$.

Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Gọi $(C') = T_{\vec{v}}(C)$ thì (C') :

$y - 4 = (x-3)^3 - 3(x-3) + 3 \Leftrightarrow y = x^3 - 9x^2 + 24x - 11$.

Vì $M \in (C)$ nên $N = T_{\vec{v}}(M) \in T_{\vec{v}}(C) = (C')$. Do đó, N là giao điểm của (C) và (C').

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') là $x^3 - 3x + 3 = x^3 - 9x^2 + 24x - 11$.

Phương trình này có hai nghiệm là $x = \frac{2}{3}$ hoặc $x = \frac{7}{3}$.

* Khi $x = \frac{2}{3}$ ta được $N\left(\frac{2}{3}; \frac{35}{27}\right)$. Vì $N \in d_m$ nên $m = \frac{11}{27}$.

* Khi $x = \frac{7}{3}$ ta được $N\left(\frac{7}{3}; \frac{235}{27}\right)$. Vì $N \in d_m$ nên $m = \frac{151}{27}$.

Kiểm tra ta thấy $m = \frac{11}{27}$ hoặc $m = \frac{151}{27}$ thì d_m cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Bài 2: Vì MN song song với trục hoành nên $\overrightarrow{MN} = k.\vec{i} = (k;0)$, với $\vec{i} = (1;0)$ là véc tơ đơn vị của trục hoành. Khi này ta có $MN = |k|$.

Xét phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (k;0)$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Gọi (C_k) là ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ thì $(C_k): y=(x-k)^3-3(x-k)+3$.

Vì $N=T_{\vec{v}}(M)\in T_{\vec{v}}(C)=(C_k)$ nên N là giao điểm của (C) và (C_k).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C_k) là $3x^2-3kx+k^2-3=0$.

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=-3k^2+36\ge 0\Leftrightarrow |k|\le 2\sqrt{3}$.

Khi $k=2\sqrt{3}$ thì (C) và (C_k) có duy nhất một điểm chung là $N\left(\sqrt{3};3\right)$.

Khi $k=-2\sqrt{3}$ thì (C) và (C_k) có duy nhất một điểm chung là $N\left(-\sqrt{3};3\right)$.

Vậy $MN=|k|$ lớn nhất khi và chỉ khi $k=\pm 2\sqrt{3}$.

Vậy, hai điểm cần tìm là $N\left(\sqrt{3};3\right)$ và $M\left(-\sqrt{3};3\right)$ hoặc $N\left(-\sqrt{3};3\right)$ và $M\left(\sqrt{3};3\right)$.

Bài 3: Giả sử đường thẳng $x=x_0$ là trục đối xứng của đồ thị (C), gọi $I(x_0;0)$

Chuyển: $(Oxy)\xrightarrow{\overrightarrow{OI}}(IXY)=\begin{cases}x=x_0+X\\ y=Y\end{cases}$

Phương trình của (C) trong hệ tọa độ mới là:

$$Y=X^4+(4x_0+4)X^3+\left(6x_0^2+12x_0+m\right)X^2+\left(4x_0^3+12x_0^2+2mx_0\right)X+x_0^4+4x_0^3+mx_0^2$$

Để là hàm số chẵn thì: $\begin{cases}4(x_0+1)=0\\ 4x_0^3+12x_0^2+2mx_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-1\\ m=4\end{cases}$

Dạng 2: *Chứng minh đồ thị có tâm đối xứng*

Bài 1:

1. Hàm số viết lại: $y=1-\dfrac{1}{x+1}$

Giả sử (C) có tâm đối xứng là $I(x_0;y_0)$

Chuyển: $(Oxy)\xrightarrow{\overrightarrow{OI}}(IXY)=\begin{cases}x=x_0+X\\ y=y_0+Y\end{cases}$

Phương trình (C) trong hệ mới là:

$$Y+y_0=1-\frac{1}{(x_0+X)+1}\Leftrightarrow Y=-y_0+1-\frac{1}{X+(x_0+1)}$$

Để hàm số là lẻ: $\begin{cases}1-y_0=0\\ x_0+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=1\end{cases}\Leftrightarrow I(-1;1)$

2. Hàm số viết lại: $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

Giả sử (C) có tâm đối xứng là $I(x_0;y_0)$

Chuyển: $(Oxy)\xrightarrow{\overrightarrow{OI}}(IXY)=\begin{cases}x=x_0+X\\ y=y_0+Y\end{cases}$

Phương trình (C) trong hệ mới là:

$$Y+y_0=(x_0+X)+1+\frac{1}{(x_0+X)-1}\Leftrightarrow Y=X+(x_0+1-y_0)+\frac{1}{X+(x_0-1)}$$

Để hàm số là lẻ: $\begin{cases}x_0+1-y_0=0\\ x_0-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=2\end{cases}\Leftrightarrow I(1;2)$

Chứng tỏ đồ thị hàm số có tâm đối xứng $I(1;2)$.

Bài 2:

1. Ta có $y'=3x^2-6x$, $y''=6x-6$ $\quad y''=0\Leftrightarrow x=1$.

Hoành độ điểm I thuộc (C) là $x=1, y(1)=-1$. Vậy $I(1;-1)\in(C)$.

2. Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y-1\end{cases}$.

Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là:

$Y-1=(X+1)^3-3(X+1)^2+1\Leftrightarrow Y=X^3-3X$.

Vì đây là một hàm số lẻ nên đồ thị (C) của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng.

Bài 3: Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(m+3)x+2+3m$ và $y''=6x-2(m+3)$

Đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'_{y'}>0\\ y_{(x_I)}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+3)^2-3(2+3m)>0\\ \left(\dfrac{m+3}{3}\right)^3-(m+3).\left(\dfrac{m+3}{3}\right)^2+(2+3m).\left(\dfrac{m+3}{3}\right)-2m=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+3>0\\ 2m^3-9m^2+9m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0, m=3, m=\frac{3}{2}.$$

Dạng 3: *Tìm tham số m để đồ thị có tâm đối xứng*

Bài 1:

1. Ta có: $y'=3x^2-6x+3m$, $y''=6x-6$ và $y''=0\Leftrightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow I(1;6m+2)$

Để đồ thị có tâm đối xứng I thì: $\begin{cases}1=1\\ 6m+2=2\end{cases}\Rightarrow m=0$

Vậy với $m=0$, đồ thị có tâm đối xứng I.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Gọi J là giao hai tiệm cận, thì $J(2;m+4)$. Để đồ thị có tâm đối xứng I thì ta buộc J trùng với I, nghĩa là ta có hệ: $\begin{cases}2=2\\ m+4=1\end{cases}\Rightarrow m=-3$

Vậy với $m=-3$, đồ thị có tâm đối xứng là I

Bài 2: Ta có: $y'=-\dfrac{3x^2}{m}+6mx\Rightarrow y''=-\dfrac{6x}{m}+6m$.

Với $y''=0\Leftrightarrow -\dfrac{6x}{m}+6m=0\Rightarrow x=m^2\Rightarrow I\left(m^2;2m^5-2\right)$

Để đồ thị có tâm đối xứng I thì $\begin{cases}m^2=1\\ 2m^5-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\pm1\\ m^5=1\end{cases}\Leftrightarrow m=1$

Vậy với $m=1$, đồ thị có tâm đối xứng là I

Bài 3:

1. Với $m=2\Rightarrow (C_2): y=x^3-5x^2+6x+3$

Gọi $A(a;a^3-5a^2+6a+3)$, $B(b;b^3-5b^2+6b+3)$ là hai điểm thuộc (C) và đối xứng nhau qua O $\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\ a^3-5a^2+6a+3=-b^3+5b^2-6b-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\ a^2=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

Vậy hai điểm thuộc (C) đối xứng nhau qua O là:

$A\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}};\dfrac{33}{5}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$ và $B\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}};-\dfrac{33}{5}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$.

2. Gọi $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là hai điểm thuộc (C)

M, N đối xứng nhau qua Oy $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1,x_2\neq0\\ x_1=-x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1,x_2\neq0\\ x_1=-x_2\\ x_1^2+2m=0\quad(*)\end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2m>0\Leftrightarrow m<0$.

Vậy $m<0$ là những giá trị cần tìm.

Dạng 4: *Lập phương trình đường cong đối xứng với một đường cong qua một điểm hoặc qua một đường thẳng*

Bài 1:

1. Gọi một điểm bất kỳ $A\left(x;x-1-\dfrac{1}{x+2}\right)\in(C)$, $B(x';y')\in(C')$

Khi A chạy trên (C) qua điểm I, thì B chạy trên (C'), cho nên nếu (C') đối xứng với (C) qua I thì A và B đối xứng nhau qua I

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x_1-x'\\ y=2y_1-y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2-x'\\ y=2-y'\end{cases}\Leftrightarrow 2-y'=-2-x'-1-\dfrac{1}{-2-x'+2};\Leftrightarrow -y'=-x'-5+\dfrac{1}{x'}$

Vậy, (C') có phương trình: $y=x+5-\dfrac{1}{x}$

2. Gọi một điểm bất kỳ $A(x;y)\in(C)\Rightarrow y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$, $B(x';y')\in(C')$

Khi A chạy trên (C) qua điểm I, thì B chạy trên (C'), cho nên nếu (C') đối xứng với (C) qua I thì A và B đối xứng nhau qua I

$\begin{cases}x=2.0-x'\\ y=2.2-y'\end{cases}\Rightarrow 4-y'=\dfrac{(-x')^4}{2}-3(-x')^2+\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow y'=-\dfrac{x'^4}{2}+3x'^2+\dfrac{3}{2}$

Vậy, (C') có phương trình: $y=-\dfrac{x^4}{2}+3x^2+\dfrac{3}{2}$

Bài 2:

1. $(C')=T_{\vec{u}}((C))$

Gọi M' (x';y') là ảnh của điểm M(x;y) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}=(1;2)$, ta có

$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=1\\ y'-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-1\\ y=y'-2\end{cases}$.

$M\in(C)\Leftrightarrow y=x^3-3x+1\Leftrightarrow y'-2=(x'-1)^3-3(x'-1)+1$

$\Leftrightarrow y'-2=x'^3-3x'^2+3x'-1-3x'+4\Leftrightarrow y'=x'^3-3x'^2+5\Leftrightarrow M'\in(C'): y=x^3-3x^2+5$.

Vậy phương trình của (C'): $y=x^3-3x^2+5$.

2. Gọi M' (x';y') là ảnh của M(x;y) qua phép đối xứng tâm I(- 1;1), ta có

I là trung điểm của MM' $\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=2x_I=-2\\ y+y'=2y_I=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2-x'\\ y=2-y'\end{cases}$.

$M\in(C)\Leftrightarrow y=x^3-3x+1\Leftrightarrow 2-y'=(-2-x')^3-3(-2-x')+1$

$\Leftrightarrow M'\in(C'): y=x^3+6x^2+9x+3$

Cách khác: Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$. Hệ trục Oxy $\Rightarrow$ Hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases}x=X+x_I=X-1\\ y=Y+y_I=Y+1\end{cases}$.

Đối hệ trục IXY, phương trình (C):

$Y+1=(X-1)^3-3(X-1)+1\Leftrightarrow Y=(X-1)^3-3(X-1)=F(X)$ (C') đối xứng với (C) qua gốc tọa độ I, suy ra phương trình

$(C'): Y=-F(-X)\Leftrightarrow Y=-(-X-1)^3+3(-X-1)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Suy ra phương trình (C') đối với hệ trục Oxy:

$y-1=-(-x-2)^3+3(-x-2) \Leftrightarrow y=x^3+6x^2+9x+3.$

3. Gọi M(x';y') là ảnh của M(x;y) qua phép đối xứng qua đường thẳng (d): x = 2, ta có

$\begin{cases} x+x'=4 \\ y=y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-x' \\ y=y' \end{cases}.$

$M(x,y)\in(C) \Leftrightarrow y=x^3-3x+1 \Leftrightarrow y'=(4-x')^3-3(4-x')+1$

$\Leftrightarrow y'=-x'^3+12x'^2-45x'+53 \Leftrightarrow M'\in(C'): y=-x^3+12x^2-45x+53$

Vậy phương trình (C'): $y=-x^3+12x^2-45x+53.$

Cách khác. Tịnh tiến $\overrightarrow{OE}$ với E(2;0). Hệ trục Oxy $\Rightarrow$ Hệ trục EXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x=X+x_E=X+2 \\ y=Y+y_E=Y \end{cases}.$

Đối với hệ trục EXY:

Phương trình (d): X = 0.

Phương trình (C): $Y=(X+2)^3-3(X+2)+1=G(X).$

(C') đối xứng với (C) qua trục tung EY, suy ra phương trình (C'):

$$Y=G(-X)=(-X+2)^3-3(-X+2)+1.$$

Suy ra phương trình (C') đối với hệ trục Oxy.

$$y=(4-x)^3-3(4-x)+1=-x^3+12x^2-45x+53.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Vấn đề 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Bài 1:

1. $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to 2^+$ và khi $x\to 2^-$)

$y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$) đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên

2. $x=-\frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to-\frac{1}{3}^+$ và khi $x\to-\frac{1}{3}^-$)

$y=-\frac{2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$) đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Bài 2:

1. $x=5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to5^+$ và khi $x\to5^-$) đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

$y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$).

2. $x=-\frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to-\frac{1}{3}^+$ và khi $x\to-\frac{1}{3}^-$) đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$y=\frac{2}{3}x-\frac{20}{9}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$)

Bài 3:

1. $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to2^+$ và khi $x\to2^-$)

$x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to-2^+$ và khi $x\to-2^-$).

$y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$) đồ thị không có tiệm cận xiên.

2. $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$) đồ thị không có tiệm cận xiên và tiện cận đứng.

Bài 4:

1. $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to-1^+$ và khi $x\to-1^-$) đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$y=2x-3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$).

2. $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to0^+$ và khi $x\to0^-$).

$x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to2^+$ và khi $x\to2^-$) đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$y=x+2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$).

Bài 5:

1. $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to-2^+$ và khi $x\to-2^-$).

$x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x\to2^+$ và khi $x\to2^-$) đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$y=2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$)

2. $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$) đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên và tiện cận đứng.

Bài 6:

1. $D=(-\infty;1]\cup[2;+\infty).$

Từ tập xác định của hàm số suy ra đồ thị hàm không có tiệm cận đứng.

Ta có thể xem tiệm cận ngang như là trường hợp đặc biệt của tiệm cận xiên khi a = 0, do đó ta chỉ cần tiệm cận xiên của đồ thị hàm, nếu đường tiệm cận có dạng y = b thì đó là tiệm cận ngang.

$y=x+4+\sqrt{x^2-3x+2}=x\left(1+\frac{4}{x}\right)+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=x\left(1+\frac{4}{x}\right)+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)+x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=2$ và

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)+4\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)+4\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-1}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}\right)+4\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}+4\right)=\frac{5}{2}$$

Vậy đường thẳng $y=2x+\frac{5}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x\to+\infty$).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)+4\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}+4\right)=\frac{11}{2}.$$

Vậy đồ thị hàm số có đường thẳng $y=\frac{11}{2}$ là đường tiệm cận ngang (khi $x\to-\infty$)

Cách khác. Trong bài toán này ta áp dụng cách biến đổi sau để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Với $a>0$, ta có $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$

Đặt $\varepsilon(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ thì ta chứng minh được rằng $\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=0$

Ta có $\sqrt{x^2-3x+2}=\left|x-\frac{3}{2}\right|+\sqrt{x^2-3x+2}-\left|x-\frac{3}{2}\right|.$

Đặt $\varepsilon(x)=\sqrt{x^2-3x+2}-\left|x-\frac{3}{2}\right|$, ta có:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x+2-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\left|x-\frac{3}{2}\right|}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-3x+2}+\left|x-\frac{3}{2}\right|}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{4|x|\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\left|1-\frac{3}{2x}\right|\right)}=0.$$ Suy ra $y=x+4+\left|x-\frac{3}{2}\right|+\varepsilon(x)$.

Khi $x\to+\infty$ thì $y=x+4+x-\frac{3}{2}+\varepsilon(x)=2x+\frac{5}{2}+\varepsilon(x)$.

Vì $\lim_{x\to+\infty}[y-(2x+\frac{5}{2})]=\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ nên đường thẳng $y=2x+\frac{5}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$)

Khi $x\to-\infty$ thì $y=x+4-x+\frac{3}{2}+\varepsilon(x)=\frac{11}{2}+\varepsilon(x)$

Vì $\lim_{x\to-\infty}(y-\frac{11}{2})=\lim_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ nên đường thẳng $y=\frac{11}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to-\infty$)

2\. Ta có $\sqrt{x^2+4}=|x|+\sqrt{x^2+4}-|x|$

Đặt $\varepsilon(x)=\sqrt{x^2+4}-|x|$, ta có $\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-|x|\right)$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+|x|}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}+|x|}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=0$$

Suy ra $y=3x+\sqrt{x^2+4}=3x+|x|+\varepsilon(x)$

Khi $x\to+\infty$ thì $y=3x+x+\varepsilon(x)=4x+\varepsilon(x)$

Vì $\lim_{x\to+\infty}(y-4x)=\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ nên đường thẳng $y=4x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$)

Khi $x\to-\infty$ thì $y=3x-x+\varepsilon(x)=2x+\varepsilon(x)$

Vì $\lim_{x\to-\infty}(y-2x)=\lim_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ nên đường thẳng $y=2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x\to-\infty$)

Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và tiện cận đứng.

3\. * $\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$.

$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=2$, suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=-2$, suy ra đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

* $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}=0$, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vấn đề 2. Một số dạng toán khác

Bài 1:

1. $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{4x_0+1}{3-x_0}\right)$.

TCĐ của (C): $x - 3 = 0 \Rightarrow d(M, TCĐ) = |x_0 - 3|$.

TCN của (C): $y + 4 = 0 \Rightarrow d(M, TCN) = \left|\frac{4x_0+1}{3-x_0} + 4\right| = \left|\frac{13}{3-x_0}\right|$.

$\Rightarrow d(M, TCĐ).d(M, TCN) = |x_0 - 3|\left|\frac{13}{x_0-3}\right| = 13$ (đpcm).

2. $T = d(M, TCĐ) + d(M, TCN) = |x_0 - 3| + \left|\frac{13}{x_0-3}\right| \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{|x_0-3|\left|\frac{13}{x_0-3}\right|} = 2\sqrt{13}$.

$T = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow |x_0 - 3| = \left|\frac{13}{x_0-3}\right| \Leftrightarrow (x_0-3)^2 = 13 \Leftrightarrow x_0 - 3 = \pm\sqrt{13} \Leftrightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{13}$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{13}$ khi và chỉ khi

$M(3+\sqrt{13}; -\sqrt{13}-4)$ hoặc $M(3-\sqrt{13}; \sqrt{13}-4)$.

Bài 2:

Ta có $y = mx + 3 + \frac{m^2+1}{x-1}$, suy ra (C) có tiệm cận xiên (d) $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó phương trình của (d): $y = mx + 3$.

1. $A(1;4) \in (d) \Leftrightarrow 4 = m + 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$).

2. Giao điểm của (d) với hai trục tọa độ là M(0;3) và $M(-\frac{3}{m};0)$.

Diện tích tam giác vuông OMN: $S = \frac{1}{2}OM.ON = \frac{1}{2}3.\left|\frac{3}{m}\right| = \frac{9}{2|m|}$.

Theo giả thiết: $S = 6 \Leftrightarrow \frac{9}{2|m|} = 6 \Leftrightarrow |m| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \pm\frac{3}{4}$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$).

3. $d(O;(d)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

Bài 3: $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2}{x+1} = (m+1)x + m + \frac{2}{x+1}$, suy ra (C) có hai đường tiệm cận $x = -1$ (d₁), $y = (m+1)x + m$ (d₂).

1. $M \in (C) \Rightarrow M(x_0; (m+1)x_0 + m + \frac{2}{x_0+1})$.

$\Rightarrow d(M,(d_1)).d(M,(d_2)) = |x_0+1|\left|(m+1)x_0 + m - (m+1)x_0 - m - \frac{2}{x_0+1}\right|.\frac{1}{\sqrt{(m+1)^2+1}}$

$d(M,(d_1)).d(M,(d_2)) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(m+1)^2+1}} = 2 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

2. Giao điểm của hai đường tiệm cận là I(-1; -1).

Vì tọa độ I thỏa mãn phương trình (P) nên $I \in (P)$.

3. (C) có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Đường tròn (γ) có tâm là gốc tọa độ O, bán kính $R = \frac{1}{2}$, suy ra

Tiệm cận xiên tiếp xúc đường tròn $(\gamma) \Leftrightarrow d(O;TCX) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{(m+1)^2+1}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4m^2 = (m+1)^2 + 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq -1$).

Bài 4:

1. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$

M cách đều hai trục tọa độ $\Leftrightarrow |x_0| = |y_0| = \left|\frac{3x_0-1}{x_0-2}\right|$

- $\frac{3x_0-1}{x_0-2} = x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 5x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
- $\frac{3x_0-1}{x_0-2} = -x_0 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy có bốn điểm cần tìm: $M_{1,2}\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right), M_{3,4}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là:

$d = |x_0| + |y_0| = |x_0| + \left|\frac{3x_0-1}{x_0-2}\right|$

Với $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{3}$ nên với $|x_0| > \frac{1}{3} \Rightarrow d > \frac{1}{3}$.

Ta xét $|x_0| < \frac{1}{3} \Rightarrow d \geq \left|x_0 + \frac{3x_0-1}{x_0-2}\right| = \left|\frac{x_0^2 + x_0 - 1}{x_0-2}\right|$

Mà $\frac{x_0^2 + x_0 - 1}{x_0-2} - \frac{1}{3} = \frac{3x_0^2 + 2x_0 - 1}{3(x_0-2)} = \frac{(3x_0-1)(x_0+1)}{3(x_0-2)} > 0$ với $\forall x_0 : |x_0| < \frac{1}{3}$.

Suy ra $d \geq \frac{1}{3}$ $\forall x_0$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

3. Ta có $A\left(2+a;3+\frac{5}{a}\right)$, $B\left(2-b;3-\frac{5}{b}\right)$ (với $a,b>0$) là hai điểm nằm về hai nhánh của (C). $AB^2=(a+b)^2+\left(\frac{5}{a}+\frac{5}{b}\right)^2=(a+b)^2(1+\frac{25}{a^2b^2})\ge 4ab.2.\frac{5}{ab}=40$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=b\\1=\frac{25}{a^2b^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{5}$.

4. Ta có $M\left(m;\frac{3m-1}{m-2}\right)\in(C)$, $d(M,\Delta)=\frac{\left|3m-4\frac{3m-1}{m-2}+1\right|}{5}=\frac{1}{5}\left|\frac{3m^2-17m+2}{m-2}\right|$. Suy ra

$d(M,\Delta)=\frac{12}{5}\Leftrightarrow\left|3m^2-17m+2\right|=12|m-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m^2-29m+26=0\\3m^2-5m-22=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1;m=\frac{26}{3}\\m=-2;m=\frac{11}{3}\end{array}\right.$

Vậy $M_1(1;-2), M_2\left(\frac{26}{3};\frac{15}{4}\right), M_3\left(-2;\frac{7}{4}\right), M_4\left(\frac{11}{3};6\right)$.

Bài 5:

1. Với $m=-2$ hàm số đã cho suy biến thành đường thẳng $y=2x-4$ nên không có tiệm cận. Do vậy, $m\ne-2$ hàm số đã cho có tiệm cận xiên là $y=2x+3m+2$

Giả sử tiệm cận xiên cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{3m+2}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B(0;3m+2)$. $S_{AOB}=4$ tức $OA.OB=8$ hay $(3m+2)^2=16\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$ hoặc $m=-2$.

2. Tiệm cận xiên là (t): $2mx-y+m-1=0,\ m\ne0$

$d(O;t)=\frac{1}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow\frac{|m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$ hay $13m^2-34m+16=0\Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=\frac{8}{13}$.

Bài 6: $m\ne0$, $S=2\Leftrightarrow\left|\frac{1}{m}\right|.\left|\frac{2}{m}\right|=2\Leftrightarrow m=\pm1$.

Bài 7:

1. Với $m<0$ hàm số đã cho có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên có phương trình $x+2y-6=0$. Góc giữa tiệm cận xiên và (d_m) là 45^0, ta có $\cos45^0=\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{4+1}}$

hay $(m+3)(3m-1)=0$ tức $m=-3$ hoặc $m=\frac{1}{3}$ (không thỏa $m<0$).

2. Với $m\ne0$ hàm số đã cho có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên có phương trình: $mx-y+1-m=0$ $(m\ne0)$, tiệm cận đứng có phương trình $x+1=0$. Tiệm cận xiên và tiệm cận đứng cùng với Ox tạo thành một tam giác vuông có một góc là 60^0 khi và chỉ khi tiệm cận xiên hợp với Ox góc $\pm60^0$ hoặc $\pm30^0$. Ta tìm được $m=\sqrt{3}$ hoặc $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ thỏa mãn.

Bài 8: $m\ne0$, $(d): mx-y+2m+1=0$

Theo bài toán, ta có $d(I;d)=\sqrt{2}$ tức có phương trình $7m^2-6m-1=0$.

Dạng 1: Hàm số bậc ba và vấn đề liên quan

Bài 1:

1. $-x^3+3x^2+9x-1=(2m-1)x-1\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2-3x+2m-10=0$ (*)

Đường thẳng d_m cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=49-8m>0\\2m-10\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{49}{8}\\m\ne5\end{cases}$.

$BC^2=\left[1+(2m-1)^2\right](x_1-x_2)^2=(4m^2-4m+2)(49-8m)$

$BC=\sqrt{82}\Leftrightarrow(2m^2-2m+1)(49-8m)=41$

$8m^3-57m^2+53m-4=0\Leftrightarrow(m-1)(8m^2-49m+4)=0\Leftrightarrow m=1, m=\frac{49\pm\sqrt{2273}}{16}$.

2. Gọi $A(a;-a^3+3a^2+9a-1)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;y_0)$ có phương trình

$y=(-3x_0^2+6x_0+9)(x-x_0)-x_0^3+3x_0^2+9x_0-1$

$A\in\Delta\Leftrightarrow a^3-3a^2-9a+(-3x_0^2+6x_0+9)(a-x_0)-x_0^3+3x_0^2+9x_0=0$

$\Leftrightarrow(a-x_0)^2(a+2x_0-3)=0\Leftrightarrow a=x_0, a=3-2x_0$. Để từ A vẽ đến (C) đúng một tiếp tuyến thì ta phải có $x_0=3-2x_0\Leftrightarrow x_0=1\Rightarrow A(1;10)$

Bài 2:

2. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y'=-3x^2-6x+m\le0,\forall x>0\Leftrightarrow m\le3x^2+6x=f(x)$

Hàm số $f(x)=3x^2+6x$ liên tục trên $(0;+\infty)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có $f'(x)=6x+6>0,\forall x>0$ và $f(0)=0$. Từ đó ta được: $m\le 0$.

3. Giả sử đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm có hoành độ x_1,x_2,x_3 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, suy ra $x_1+x_3=2x_2$ và x_1,x_2,x_3 là nghiệm của phương trình: $x^3+3x^2-mx-4=0$ (*). Nên ta có: $x^3+3x^2-mx-4=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=-3\Rightarrow 3x_2=-3\Rightarrow x_2=-1$ thay vào (*) ta có được $m=2$.

Với $m=2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow x^3+3x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=-1,x=-1\pm\sqrt{5}$

Ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm lập thành cấp số cộng

Bài 3: ***Điều kiện cần:*** Giả sử (C_m) cắt Ox tại ba điểm A,B,C suy ra phương trình $x^3+3x^2+(4m-1)x+2m^2-3=0$ (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3$ và khi đó $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(x_3;0)\Rightarrow AB=BC\Leftrightarrow x_2-x_1=x_3-x_2\Leftrightarrow x_1+x_3=2x_2$ (1)

Mặt khác: $x^3+3x^2+(4m-1)x+2m^2-3=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-ax^2+bx-c$

Với $a=x_1+x_2+x_3, b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1, c=x_1x_2x_3$

So sánh hệ số của x^2 ta có: $a=-3\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=-3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $3x_2=-3\Rightarrow x_2=-1\Rightarrow(*)$ có một nghiệm

$$x=-1\Rightarrow -1+3-4m+1+2m^2-3=0\Leftrightarrow m=0,m=2$$

Điều kiện đủ:

* $m=0\Rightarrow(*)\Leftrightarrow x^3+3x^2-x-3=0\Leftrightarrow x(x^2-1)+3(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow(x^2-1)(x+3)=0\Leftrightarrow x=-3,x=-1,x=1$ ba nghiệm này thỏa (1) nên $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

* $m=2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow x^3+3x^2+7x+5=0\Leftrightarrow(x+1)(x^2+2x+5)=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow m=2$ loại

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Với cách làm tương tự như trên ta có kết quả sau:

Đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt Ox tại ba điểm lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $\begin{cases}y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0\\ y_{CT}\cdot y_{CD}<0\end{cases}$

Bài 4: Đồ thị (C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị đồng thời $\begin{cases}y_{cd}\cdot y_{ct}<0\\ y(0)>0\end{cases}$ (1)

$\Rightarrow y_1\cdot y_2=4(m^2+m+1)^2x_1x_2-2(m^2+m+1)(m^2+1)(x_1+x_2)+(m^2+1)^2$

$=(m+1)(m^3-m^2-m-3)$. Nên $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(m^3-m^2-m-3)<0\\ m<1\end{cases}$ (2)

Xét hàm số $g(m)=m^3-m^2-m-3,\ m<1$.

Có $g'(m)=3m^2-2m-1$ và $g'(m)=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}, m=1$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(m)<0\ \forall m<1$

$\Rightarrow(2)\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>0\\ m<1\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<1$ là những giá trị cần tìm.

Bài 5: Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:

$x^3-2x^2+8=2mx\Leftrightarrow 2m=x^2-2x+\dfrac{8}{x}=f(x)$ (*)

Xét hàm số $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=2x-2-\dfrac{8}{x^2}=\dfrac{2(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}, f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán $\Rightarrow 2m>f(1)=7\Leftrightarrow m>\dfrac{7}{2}$.

Bài 6:

1. Gọi A, B là hai điểm thuộc (C_2) và đối xứng nhau qua O

$\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\ a^3-5a^2+6a+3=-b^3+5b^2-6b-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\ a^2=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

Hai điểm thuộc (C_2) đối xứng nhau qua O là: $A\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}};\dfrac{33}{5}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$ và $B\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}};-\dfrac{33}{5}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$.

2. Gọi M, N là hai điểm thuộc đồ thị

M,N đối xứng nhau qua Oy $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1,x_2\ne 0\\ x_1=-x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1,x_2\ne 0\\ x_1=-x_2\\ x_1^2+2m=0\end{cases}$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2m>0\Leftrightarrow m<0$.

Bài 7:

1. Với $m=1\Rightarrow(C_1): y=x^3-3x^2+x+1$

Gọi $M(x_0;y_0), N(-x_0;-y_0)$ (với $x_0>0$) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

$M,N\in(C_1)\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0^3-3x_0^2+x_0+1\\ -y_0=-x_0^3-3x_0^2-x_0+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0^3-3x_0^2+x_0+1\\ x_0^2=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\\ x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$,

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Gọi $M(x_0;y_0)$, $N(-x_0;y_0);x_0>0$ đối xứng nhau qua Oy.

$M,N\in(C_m)\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0^3-(2m+1)x_0^2+mx_0+3m-2\\y_0=-x_0^3-(2m+1)x_0^2-mx_0+3m-2\end{cases}$

$\Rightarrow 2x_0^3+2mx_0=0\Leftrightarrow x_0^2=-m$ (do $x_0\neq 0$). Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m>0\Leftrightarrow m<0$.

3. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ đồ thị (C_m) luôn đi qua

Ta có: $y_0=x_0^3-(2m+1)x_0^2+mx_0+3m-2\quad\forall m$

$\Leftrightarrow m(2x_0^2-x_0-3)+y_0-x_0^3+x_0^2+2=0\quad\forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0^2-x_0-3=0\\y_0=x_0^3-x_0^2-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-1\\y_0=-4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_0=\dfrac{3}{2}\\y_0=-\dfrac{7}{8}\end{cases}$.

Vậy họ đường cong (C_m) có hai điểm cố định $A_1(-1;-4)$ và $A_2\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{8}\right)$.

4. Gọi $B(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà không có đường cong nào của họ đồ thị (C_m) đi qua. Ta có: $y_0\neq x_0^3-(2m+1)x_0^2+mx_0+3m-2\quad\forall m$

$\Leftrightarrow m(2x_0^2-x_0-3)+y_0-x_0^3+x_0^2+2\neq 0\quad\forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0^2-x_0-3=0\\y_0\neq x_0^3-x_0^2-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-1\\y_0\neq -4\end{cases}\vee\begin{cases}x_0=\dfrac{3}{2}\\y_0\neq-\dfrac{7}{8}\end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua là đường thẳng $x+1=0$ trừ đi điểm $(-1;-4)$ và đường thẳng $2x-3=0$ trừ đi điểm $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{8}\right)$.

Bài 8: Xét hình bình hành ABCD với $A\left(a;a^3-2\sqrt{2}a\right)$, $B\left(b;b^3-2\sqrt{2}b\right),C\left(c;c^3-2\sqrt{2}c\right),D\left(d;d^3-2\sqrt{2}d\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\begin{cases}b-a=c-d\\b^3-a^3-2\sqrt{2}(b-a)=c^3-d^3-2\sqrt{2}(c-d)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=b+d\\b^2+ab+a^2=d^2+cd+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=b+d\\ab=cd\end{cases}$. Ta có $\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}=t\Rightarrow a=ct,d=bt$.

Suy ra $a+c=b+d\Leftrightarrow c(1+t)=b(1+t)\Rightarrow t+1=0\Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow a=-c,b=-d\Rightarrow$ tâm của hình bình hành là gốc tọa độ O.

Bài 9: Đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị và $\begin{cases}y_{CD}>0\\y_{CT}<0\end{cases}$ (*) (Trong đó y_{CD},y_{CT} là giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số)

Ta có: $y'=3x^2+2ax+b\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}\\x_2=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}\end{array}\right.$. Đk: $a^2>3b$.

Hàm đạt cực tiểu tại x_1 và cực đại tại $x_2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\begin{cases}y(x_2)>0\quad(1)\\y(x_1)<0\quad(2)\end{cases}$.

Ta có: $y=\dfrac{1}{3}y'\left(x+\dfrac{a}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\left(2b-\dfrac{2a^2}{3}\right)x+c-\dfrac{ab}{9}$

$(1)\Leftrightarrow\left(2b-\dfrac{2a^2}{3}\right)\left(a+\sqrt{a^2-3b}\right)<9c-ab\Leftrightarrow-2\sqrt{\left(a^2-3b\right)^3}<27c-9ab+2a^3\quad(3)$

$(2)\Leftrightarrow\left(2b-\dfrac{2a^2}{3}\right)\left(a-\sqrt{a^2-3b}\right)>9c-ab\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(a^2-3b\right)^3}>27c-9ab+2a^3\quad(4)$

Từ (3) và (4) ta có: $\left|27c+2a^3-9ab\right|<2\sqrt{\left(a^2-3b\right)^3}$.

Bài 10:

2. Ta có $y'=\dfrac{3}{8}(x^2-2x-3)=\dfrac{3}{8}\left[(x-1)^2-4\right]\geq-\dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-2$.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là: $y=-\dfrac{3}{2}(x-1)-2=\dfrac{-3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Bài 11:

2. Ta có phương trình $x^3-3x^2=m\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=m+2$.

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m+2$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m+2<2\Leftrightarrow -4<m<0$.

3. Ta có hàm số $y=|x|^3-3x^2+2$ là hàm số chẵn nên đồ thị (C′) nhận trục Oy là trục đối xứng $\Rightarrow$ để vẽ đồ thị (C′) ta chỉ cần vẽ (C′) nằm phía bên trái hoặc bên phải của trục Oy rồi lấy đối xứng qua Oy ta được phần còn lại.

Mặt khác với $x\geq 0\Rightarrow g(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow(C)\equiv(C')$.

Vậy dựa vào đồ thị (C), ta vẽ đồ thị (C′) như sau:

- Giữ nguyên phần bên phải trục Oy của đồ thị (C).
- Lấy đối xứng qua trục Oy phần vừa vẽ ở trên ta có được đồ thị của (C′).

4. Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow|x|^3-3x^2+2=m+2$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

⇒ số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của hai đồ thị

$\begin{cases} y=|x|^3-3x^2+2 \quad (C') \\ y=m+2\ (\Delta)\end{cases}$. Dựa vào đồ thị (C'), ta có:

- $m+2<-2 \Leftrightarrow m<-4 \Rightarrow \Delta$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình (2) vô nghiệm.
- $\left[\begin{array}{l} m+2=-2\\ m+2>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4\\ m>0\end{array}\right. \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.
- $m+2=2 \Leftrightarrow m=0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.
- $-2<m+2<2 \Leftrightarrow -4<m<0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình (2) có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 12:

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0)=36 \Leftrightarrow x_0^2-x_0-6=0 \Leftrightarrow x_0=3, x_0=-2$

- $x_0=-2 \Rightarrow y_0=-27 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=36x+45$
- $x_0=3 \Rightarrow y_0=28 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=36x-80$.

3. Phương trình $\Leftrightarrow 2|x|^2-3x^2+1=-2m+1$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị: $\begin{cases}(C'): y=2|x|^3-3x^2+1\\ \Delta; y=-2m+1\end{cases}$

Dựa vào đồ thị (C') ta có $0<-2m+1<1 \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

4. Điều kiện: $x\neq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \left|2x^3-3x^2+1\right|=m$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases}(C_1): y=\left|2x^3-3x^2+1\right|\\ d: y=m\end{cases}$

Dựa vào đồ thị (C_1) suy ra:

- $m<0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm
- $m=0 \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm (loại nghiệm $x=1$)
- $0<m<1 \Rightarrow$ phương trình có đúng bốn nghiệm
- $m=1 \Rightarrow$ phương trình có đúng ba nghiệm
- $m>1 \Rightarrow$ phương trình có đúng hai nghiệm.

Bài 13:

2. $y'=-x^2+4(m+1)x-3(m+1)$.

Hàm số (1) nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, y'\leq 0 \Leftrightarrow \Delta'=4(m+1)^2-3(m+1)\leq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(4m+1)\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq m\leq -\frac{1}{4}$.

3. Ta có M và N đối xứng qua gốc tọa độ O $\Leftrightarrow \begin{cases}M(x_0;y_0)\\ N(-x_0;-y_0)\end{cases}$.

M và N thuộc đồ thị của hàm số (1) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y_0=-\frac{x_0^3}{3}+2(m+1)x_0^2-3(m+1)x_0+1 \quad (2)\\ -y_0=\frac{x_0^3}{3}+2(m+1)x_0^2+3(m+1)x_0+1 \quad (3)\end{cases}$$

Cộng hai phương trình (2) và (3), vế với vế ta được: $4(m+1)x_0^2+2=0$ (4)

M, N tồn tại $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm $\Leftrightarrow 4(m+1)<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Bài 14: 2. Gọi d là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng (D): $y=9x-3$ thì hệ số góc của d: $k=9 \Leftrightarrow y'(x_0)=9 \Leftrightarrow 6x_0^2+3=9 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$.

(x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y=k(x-x_0)+y(x_0)$.

Khi $x_0=1$ thì phương trình của d là $y=9(x-1)+6=9x-3$, phương trình này bị loại vì khi đó $d\equiv(D)$.

Khi $x_0=-1$ thì phương trình d là $y=9(x+1)-4=9x+5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=9x+5$

3. $y'=6x^2+2(m-1)x+m+2$

Đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn $\frac{1}{6}$.

*Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4-3\sqrt{3}<m<4+3\sqrt{3}$ (a).

Khi đó hai nghiệm của phương trình $y'=0$ là

$x_1=\frac{1-m-\sqrt{m^2-8m-11}}{6}$, $x_2=\frac{1-m+\sqrt{m^2-8m-11}}{6}$.

Vì $x_1<x_2$ do đó x_1, x_2 đều lớn hơn $\frac{1}{6}$ khi và chỉ khi

$$\frac{1-m-\sqrt{m^2-8m-11}}{6}>\frac{1}{6} \Leftrightarrow \sqrt{m^2-8m-11}<-m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<4-3\sqrt{3} \vee m>4+3\sqrt{3} \text{ (do (a))}\\ -m>0\\ m^2-8m-11<m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4-3\sqrt{3}\\ m>-\frac{11}{8}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{8}<m<4-3\sqrt{3}.$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 15:

1b. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' = -3x^2 - 6x + m \le 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x = f(x)$

Hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f(0) = 0$

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		+	
y	0	↗	$+\infty$

Từ đó ta được: $m \le 0$.

2. Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình cho có ba nghiệm phân biệt

$$x_1 < -1 < x_2 < 2 < x_3 \text{ và } \begin{cases} y(0) = -3 < 0 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow y(0).y\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$$

do y là hàm số liên tục trên ℝ

3. $y(-2)y(0) < 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $\alpha \in (-2;0)$ sao cho $y(\alpha) = 0$. Số α là một nghiệm của phương trình $y(x) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\alpha \in (-2;0)$.

$y(0)y(4) < 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[0;4]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $\beta \in (0;4)$ sao cho $y(\beta) = 0$. Số β là một nghiệm của phương trình $y = 0$. Mặt khác hàm số f nghịch biến trên khoảng $(0;4)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\beta \in (0;4)$.

Tương tự phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(4;+\infty)$.

Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, do đó phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

4. $y''(x) = -6x + 6 \Rightarrow x_0 = 2, y(2) = 24 \Rightarrow (t): y = 9x + 6$

$y'(x-1) = -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9 = -3x^2 + 12x \Rightarrow y'(x-1) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

6. $\begin{cases} 2 = c \\ y(-1) = -1 + a - b + c = 1 \\ y'(-1) = 3 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} (d) \cap Oy = \left\{A\left(0;-\frac{1}{3}\right)\right\} \\ y(0) = p = -\frac{1}{3} \\ y'(0) = n = 3 \\ y'(3) = 6m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{3} \\ n = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

Dạng 2: Hàm số bậc trùng phương và vấn đề liên quan

Bài 1:

2. Ta có: $y' = 4x^3 + 6(m+1)x = 2x(2x^2 + 3m + 3)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2x^2 + 3m + 3 = 0$ (*)

Hàm có ba cực trị $\Leftrightarrow 3m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -1$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$A(0;3m+2)$, $B\left(\sqrt{\frac{-3m-3}{2}};k\right)$, $C\left(-\sqrt{\frac{-3m-3}{2}};k\right)$, trong đó $k = -\frac{9}{4}(m+1)^2 + 3m + 2$.

Ta thấy $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông (chỉ vuông tại A)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{3(m+1)}{2} + (k - 3m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3(m+1)}{2} + \frac{81}{16}(m+1)^4 = 0$

$\Leftrightarrow 27(m+1)^3 = -8 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$ (Thỏa mãn điều kiện: $m < -1$).

Bài 2:

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 24y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{24}x - \frac{1}{24}$

nên ta có $y'(x_0) = 24 \Leftrightarrow x_0^3 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6$.

Vậy phương trình tiếp tuyến: $y = 24(x-2) + 6 = 24x - 42$.

3. (P) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 - 2 = 2x^2 + a \\ 4x^3 - 4x = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 - 2 = 2x^2 + a \\ 4x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^2 - 2 = a \\ x = 0, x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a = -2, a = -6$$

Bài 3:

2. Tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn $U_1(1;0): y = y'(1)(x-1) + 0 = 8x - 8$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn $U_2(-1;0)$: $y = y'(-1)(x+1) + 0 = -8x - 8$.

3. Số nghiệm của phương trình đã cho chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị (C'): $y = (x^2 - 5)\left|x^2 - 1\right|$

$(C') \equiv (C)$ khi $-1 \le x \le 1$, (C') đối xứng với (C) qua Ox khi $x < -1$ hoặc $x > 1$.

Theo đồ thị ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Bài 4:

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ ta có: $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2).

(C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$t_1, t_2\ (t_1 < t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}.$

Khi đó: $A(-\sqrt{t_2};0), B(-\sqrt{t_1};0), C(\sqrt{t_1};0), D(\sqrt{t_2};0)$

Nên $AB = BC = CD \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

Mà $\begin{cases} t_1t_2 = 2m+1 \\ t_1 + t_2 = 2m+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 = \dfrac{2m+1}{9} \\ t_1 = \dfrac{m+1}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(m+1)^2}{25} = \dfrac{2m+1}{9}$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 4, m = -\dfrac{4}{9}$

Thử lại ta thấy cả hai giá trị này đều thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 4, m = -\dfrac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

3. $A(0;2m+1)$, $B(\sqrt{m+1};-m^2)$, $C(-\sqrt{m+1};-m^2)$

Tam giác ABC vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1)+(m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 5:

2. $A(0;2m-5)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+2m-5\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+2m-5\right)$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.d(A,BC)$.

$BC = |x_B - x_C| = 2\sqrt{m}$, $d(A,BC) = |y_A - y_B| = m^2$.

$S_{ABC} = 32 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}2\sqrt{m}.m^2 = 32 \Leftrightarrow m^5 = 32^2 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn điều kiện $m > 0$).

Vậy $m = 4$.

Bài 6:

1. Tìm các điểm cố định của đồ thị hàm số (1).

Gọi đồ thị của hàm số (1) là (C_m) và $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của (C_m). Thế thì

$\forall m \in \mathbb{R}, M(x_0;y_0) \in (C_m) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, y_0 = x_0^4 + 2(m+1)x_0^2 - 4m - 4$ (*)

$\Leftrightarrow \forall m \in R, 2(x_0^2 - 2)m + x_0^4 + 2x_0^2 - 4 - y_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\sqrt{2} \\ y_0 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = \sqrt{2} \\ y_0 = 4 \end{cases}$.

Vậy (C_m) có hai điểm cố định là $A(-\sqrt{2};4)$, $B(\sqrt{2};4)$.

2. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = -(m+1)$.

Hàm số chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại $\Leftrightarrow m \geq -1$.

Chú ý. Câu trên cũng có thể giải như sau: Dựa vào các dạng đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$, chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2(m+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$.

4. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Diện tích tam giác MAB: $S = \dfrac{1}{2}AB.d(M,AB)$.

Vì độ dài AB không đổi do đó S nhỏ nhất khi và chỉ khi d(M,AB) nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+16}{8} \Leftrightarrow 8x - y - 16 = 0$.

$M \in (C) \Rightarrow M(x_0; x_0^4 + 2x_0^2 - 4)$.

$d(M,AB) = \dfrac{|8x_0 - y_0 - 16|}{\sqrt{8^2+1^2}} = \dfrac{|8x_0 - x_0^4 - 2x_0^2 + 4 - 16|}{\sqrt{65}} = \dfrac{|-x_0^4 - 2x_0^2 + 8x_0 - 12|}{\sqrt{65}}$

Vì $-x_0^4 - 2x_0^2 + 8x_0 - 12 = -x_0^4 - 2[(x_0 - 2)^2 + 2] \leq 0$

do đó $d(M,AB) = \dfrac{x_0^4 + 2x_0^2 - 8x_0 + 12}{\sqrt{65}}$

Gọi $f(x_0) = x_0^4 + 2x_0^2 - 8x_0 + 12$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$f'(x_0) = 4x_0^3 + 4x_0 - 8 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Từ bảng biến thiên trên suy ra $\min f(x_0) = 7$ đạt được khi và chỉ khi $x_0 = 1$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M(1;-1)$.

Nhận xét. *Gọi d là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng AB, vì (C) nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB do đó điểm cần tìm là tiếp điểm của d với (C).*

Bài 7:

1. $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = -\log_2 m$ (*)

Số nghiệm của (*) là số giao điểm của 2 đồ thị $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và $y = -\log_2 m$

Từ đồ thị suy ra:

$0 < m < \dfrac{1}{2}$	$m = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2} < m < 1$	$m = 1$	$m > 1$
2 nghiệm	3 nghiệm	4 nghiệm	2 nghiệm	vô nghiệm

2. Xét phương trình: $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$ (1)

Đặt $t = \cos x$, phương trình (1) trở thành: $8t^4 - 9t^2 + m = 0$ (2)

Vì $x \in [0;\pi]$ nên $t \in [-1;1]$, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3)

Gọi $(C'): y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1;1]$ và $(d): y = 1 - m$. Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C') và (d).

Chú ý rằng (C') giống như đồ thị (C) trong miền $-1 \le x \le 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 1$	$1 \le m < \frac{81}{32}$	$m = \frac{81}{32}$	$m > \frac{81}{32}$
vô nghiệm	1 nghiệm	2 nghiệm	4 nghiệm	2 nghiệm	vô nghiệm

Bài 8: $x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4 + 3 = 0$ (1)

Đặt: $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2(m^2+2)t + m^4 + 3 = 0 (2)$ $(t \ge 0)$

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm: $0 < t_1 < t_2$.

$\Delta' = (m^2+2)^2 - (m^4+3) = 4m^2 + 1 > 0$ với mọi m.

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 và $t_1 \cdot t_2 = m^4 + 3 > 0$ $t_1 + t_2 = 2(m^2+2) > 0$

Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm:

$-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4$

$= (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_1})(\sqrt{t_1})(-\sqrt{t_2})(\sqrt{t_2}) = 2(t_1 + t_2) + t_1t_2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4(m^2+2) + m^4 + 3 = m^4 + 4m^2 + 11$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 + 11 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Bài 9:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = -1$

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ phương trình (*) trở thành:

$$t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3m + 1.$$

Yêu cầu bài toán: $\begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \ne 0 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Dạng 3: Hàm số hữu tỷ và vấn đề liên quan

Bài 1

1. Thực hiện phép dời trục Oxy về hệ trục mới IXY qua công thức dời trục: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$.

Trong hệ trục mới (C) có phương trình là: $Y + 2 = \frac{2(X+1)-1}{X+1-1} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{X}$.

Xét đường thẳng $\Delta_1 : Y = X$ và điểm $T(a;b) \in (C) \Rightarrow b = \frac{1}{a}$

Đường thẳng d đi qua T, vuông góc với Δ_1 có phương trình $Y = -X + b + a$

$\Delta_1 \cap d = H : \begin{cases} Y = X \\ Y = -X + b + a \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$

Gọi T' là điểm đối xứng với T qua Δ_1 suy ra $T'(b;a)$

Vì $b = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{b} \Rightarrow T' \in (C) \Rightarrow (C)$ có Δ_1 là trục đối xứng

Tương tự ta cũng chứng minh được $\Delta_2 : Y = -X$ cũng là trục đối xứng của (C).

Vậy, (C) có ít nhất hai trục đối xứng lần lượt có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là: $y = x + 1$ và $y = -x + 3$.

2. Xét đồ thị (C) trong hệ tọa độ XIY. Gọi $M\left(m; \frac{1}{m}\right)$, $N\left(-n; -\frac{1}{n}\right)$ với $m, n > 0$

Ta có M, N nằm về hai nhánh của đồ thị (C)

$MN^2 = (m+n)^2 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^2 = (m+n)^2\left(1 + \frac{1}{m^2n^2}\right) \ge 4mn\frac{2}{mn} = 8 \Rightarrow MN \ge 2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ mn = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 1$ (do $m, n > 0$).

Vậy hai điểm cần tìm: $M(2;3)$, $N(0;1)$.

3. Xét (C) trong hệ tọa độ IXY. Ta có $Y' = -\frac{1}{X^2}$

Gọi $K\left(a; \frac{1}{a}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại A

$$\Delta : Y = -\frac{1}{a^2}(X - a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}X + \frac{2}{a}.$$

Hai tiệm cận của (C) chính là hai trục tọa độ IX, IY

Δ cắt hai trục này lần lượt tại $A\left(0; \frac{2}{a}\right)$, $B(2a;0)$

http://sachxua.edu.vn

Chu vi tam giác IAB: $P = AB + IA + IB = \sqrt{IA^2 + IB^2} + IA + IB \ge (2+\sqrt{2})\sqrt{IA.IB}$

www.facebook.com/daykem.quynhon

Mà $IA.IB = \left|\frac{2}{a}\right|.|2a| = 4 \Rightarrow P \ge 2(2+\sqrt{2})$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \left|\frac{2}{a}\right| = |2a| \Leftrightarrow a = \pm 1$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là: $K_1(2;3)$, $K_2(0;1)$.

Bài 2. Giả sử d' là đường thẳng cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B và AB đối xứng qua đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$ khi đó d' vuông góc d và cắt d tại I là trung điểm của AB. d' vuông góc d suy ra $d': y = \frac{1}{2}x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm của d' và (C)

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow x^2 + (2m-5)x - 2m = 0 \text{ (với } x \ne 1) \ (1)$$

d' cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-5)^2 + 8m > 0 \\ 1 + (2m-5) - 2m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 12m + 25 > 0 \\ -4 \ne 0 \end{cases} \text{ đúng } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(1) \Rightarrow A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1 + m\right)$, $B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2 + m\right)$

$$\Rightarrow \text{ trung điểm I của AB có tọa độ: } \begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_I = \frac{1}{4}(x_1 + x_2) + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5-2m}{2} \\ y_I = \frac{5+2m}{4} \end{cases}$$

Nên $I \in d: 2x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{5-2m}{2}\right) + \frac{5+2m}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Với $m = \frac{3}{2}$ thay vào phương trình (1), ta tìm được x

Bài 3. Xét $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của (C_m)

$$\Rightarrow y_0 = \frac{mx_0 + 1}{x_0 + m} \Leftrightarrow m(x_0 - y_0) + 1 - x_0y_0 = 0 \ \forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \pm 1$$

(C_m) luôn đi qua hai điểm cố định $A(-1;-1)$, $B(1;1)$

Vì $m \in (-1;1) \Rightarrow A, B$ nằm về hai nhánh của (C_m)

Mặt khác hai điểm A, B luôn nằm trong đường tròn $(C) \Rightarrow$ mỗi nhánh của đồ thị (C_m) luôn cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt

$\Rightarrow (C_m)$ và (C) luôn cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

Bài 4.

1. Để hai điểm M, N đối xứng qua O thì trước hết Δ phải đi qua O

Suy ra $2b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow \Delta: y = ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ

$$\frac{3x+2}{x+2} = ax \Leftrightarrow ax^2 + (2a-3)x - 2 = 0 \ (*)$$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4a + 9 > 0 \Leftrightarrow a \ne 0. \\ 4 \ne 0 \end{cases}$$

M, N đối xứng qua O $\to x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Thử lại thấy $x = \frac{3}{2}$ thỏa mãn.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x$

$$\frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2 \Rightarrow A(-1;-1), B(2;2)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x + m$

$$\frac{3x+2}{x+2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 0 \ (1)$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt C, D $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-2, -1, 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-9) > 0 \\ m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;1) \cup (9;+\infty) \\ m \ne 0 \end{cases}$

Khi đó: $C(x_1; x_1 + m), D(x_2; x_2 + m)$, ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Leftrightarrow \Delta = 9 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 9 = 9 \Leftrightarrow m = 0, m = 10$

Kiểm tra thấy $m = 10$ là giá trị cần tìm.

Bài 5:

1. Gọi $M\left(m; \frac{m+2}{m-1}\right) \in (C) \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{\left|2m + \frac{m+2}{m-1} - 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{|2m^2 - 3m + 4|}{\sqrt{5}|m-1|}$.

- $d(M,\Delta) = \frac{6}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2m^2 - 3m + 4| = 6|m-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m^2 - 9m + 10 = 0 \\ 2m^2 + 3m - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2; m = \frac{5}{2} \\ m = -2; m = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vậy $m=\frac{1}{2}, m=\frac{5}{2}, m=\pm 2$ là những giá trị cần tìm.

* Xét hàm số $f(m)=\frac{2m^2-3m+4}{m-1}$, ta có $f'(m)=\frac{2m^2-4m-1}{(m-1)^2}$

$$f'(m)=0 \Leftrightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(m)\ge f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)=1+2\sqrt{6} \\ f(m)\le f\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)=1-2\sqrt{6}\end{array}\right. \Rightarrow d(M,\Delta)=|f(m)|\ge 2\sqrt{6}-1.$$

Vậy $d(M,\Delta)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$.

Chú ý: $f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$ và $f\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$ nằm ở 2 nhánh khác nhau của đồ thị f(m).

2. Gọi $A\left(1+a;1+\frac{3}{a}\right)$, $B\left(1-b;1-\frac{3}{b}\right)$ với $a,b>0 \Rightarrow A,B$ nằm về hai nhánh của (C).

$\overrightarrow{BA}=\left(a+b;\frac{3(a+b)}{ab}\right) \Rightarrow AB^2=(a+b)^2\left[1+\frac{9}{a^2b^2}\right]$

Do $(a+b)^2\ge 4ab \Rightarrow AB^2\ge 4ab\left(1+\frac{9}{a^2b^2}\right)=4\left(ab+\frac{9}{ab}\right)\ge 24$.

$\Rightarrow AB\ge 2\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=\frac{9}{ab}\end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$

3. Gọi $N(x_0;y_0)\in(C) \Leftrightarrow y_0=\frac{x_0+2}{x_0-1}$.

Theo bài ra: $d(N,Oy)=2.d(N,Ox) \Leftrightarrow |x_0|=2|y_0| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2y_0 \\ x_0=-2y_0\end{array}\right.$.

* $x_0=2y_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{2x_0+4}{x_0-1} \Leftrightarrow x_0^2-3x_0-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=-\frac{1}{2} \\ x_0=4 \Rightarrow y_0=2\end{array}\right.$.

* $x_0=-2y_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{-2x_0-4}{x_0-1} \Leftrightarrow x_0^2+x_0+4=0$ vô nghiệm.

4. Tổng khoảng cách từ A đến hai trục tọa độ: $k=|a|+\left|\frac{a+2}{a-1}\right|$

Bài 6: Do A, B, C thuộc (C) nên $A\left(a;\frac{-2}{a}\right), B\left(b;\frac{-2}{b}\right), C\left(c;\frac{-2}{c}\right)$

Gọi $H(x_0;y_0)$ là trực tâm của tam giác ABC

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ (*). Mà $\overrightarrow{AH}=\left(x_0-a;y_0+\frac{2}{a}\right), \overrightarrow{BC}=\left(c-b;\frac{2(c-b)}{bc}\right)$

$\overrightarrow{BH}=\left(x_0-b;y_0+\frac{2}{b}\right), \overrightarrow{AC}=\left(c-a;\frac{2(c-a)}{ac}\right)$

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-a+\frac{2}{bc}\left(y_0+\frac{2}{a}\right)=0 \\ x_0-b+\frac{2}{ac}\left(y_0+\frac{2}{b}\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\frac{4}{abc} \\ y_0=\frac{abc}{2}\end{cases}$. Suy ra $y_0=-\frac{2}{x_0} \Rightarrow H\in(C)$.

Bài 7:

1. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$

M cách đều hai trục tọa độ $\Leftrightarrow |x_0|=|y_0|=\left|\frac{3x_0-1}{x_0-2}\right|$

* $\frac{3x_0-1}{x_0-2}=x_0 \Leftrightarrow x_0^2-5x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

* $\frac{3x_0-1}{x_0-2}=-x_0 \Leftrightarrow x_0^2+x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Vậy có bốn điểm cần tìm: $M_{1,2}\left(\frac{5\pm\sqrt{21}}{2};\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\right), M_{3,4}\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là:

$d=|x_0|+|y_0|=|x_0|+\left|\frac{3x_0-1}{x_0-2}\right|$

Với $x_0=\frac{1}{3} \Rightarrow d=\frac{1}{3}$ nên với $|x_0|>\frac{1}{3} \Rightarrow d>\frac{1}{3}$.

Ta xét $|x_0|<\frac{1}{3} \Rightarrow d\ge\left|x_0+\frac{3x_0-1}{x_0-2}\right|=\left|\frac{x_0^2+x_0-1}{x_0-2}\right|$

Mà $\frac{x_0^2+x_0-1}{x_0-2}-\frac{1}{3}=\frac{3x_0^2+2x_0-1}{3(x_0-2)}=\frac{(3x_0-1)(x_0+1)}{3(x_0+1)}>0$ với

$\forall x_0:|x_0|<\frac{1}{3}$. Suy ra $d\ge\frac{1}{3}\ \ \forall x_0$.

3. Ta có $A\left(2+a;3+\frac{5}{a}\right)$, $B\left(2-b;3-\frac{5}{b}\right)$ (với $a,b>0$) là hai điểm nằm về hai nhánh của (C).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$AB^2=(a+b)^2+\left(\frac{5}{a}+\frac{5}{b}\right)^2=(a+b)^2\left(1+\frac{25}{a^2b^2}\right)\ge 4ab.2.\frac{5}{ab}=40$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=b\\ 1=\dfrac{25}{a^2b^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{5}$.

4. Ta có $M\left(m;\dfrac{3m-1}{m-2}\right)\in(C)$, $d(M,\Delta)=\dfrac{\left|3m-4\left(\dfrac{3m-1}{m-2}\right)+1\right|}{5}=\dfrac{1}{5}\left|\dfrac{3m^2-17m+2}{m-2}\right|$

$$d(M,\Delta)=\frac{12}{5}\Leftrightarrow|3m^2-17m+2|=12|m-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m^2-29m+26=0\\3m^2-5m-22=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1;m=\frac{26}{3}\\m=-2;m=\frac{11}{3}\end{array}\right.$$

Vậy: $M_1(1;-2),M_2\left(\dfrac{26}{3};\dfrac{15}{4}\right),M_3\left(-2;\dfrac{7}{4}\right),M_4\left(\dfrac{11}{3};6\right)$.

Bài 8: Ta đổi trục toạ độ, hàm số trở thành $Y=\dfrac{3}{X}$ trên hệ trục IXY, với I(2; 1)

Xét hàm số $y=\dfrac{3}{x}$. Gọi $A\left(a,\dfrac{3}{a}\right),B\left(b,\dfrac{3}{b}\right),C\left(c;\dfrac{3}{c}\right)$ là 3 điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số; Gọi H(m, n) là trực tâm của tam giác ABC

Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\ (1)\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\ (2)\end{cases}$ Từ (1) ta có $m=\dfrac{3na+a^2bc-9}{abc}$, từ (2) suy ra

$m=\dfrac{3nb+ab^2c-9}{abc}$. Từ đó suy ra $\dfrac{3na+a^2bc-9}{abc}=\dfrac{3nb+ab^2c-9}{abc}\Leftrightarrow n=\dfrac{-abc}{3}$

thay vào (1) ta được $m=\dfrac{-9}{abc}$ hay $n=\dfrac{3}{m}$ có nghĩa là H thuộc đồ thị (C).

Bài 9: 1. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua

Suy ra $y_0=\dfrac{mx_0+2}{2x_0+m}\Leftrightarrow m(x_0-y_0)+2-2x_0y_0=0\ \forall m$

Từ đó ta tìm được $A_1(1;1)$; $A_2(-1;-1)$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua

Suy ra $y_0\ne\dfrac{mx_0+2}{2x_0+m}\Leftrightarrow m(y_0-x_0)+2x_0y_0-2\ne 0\ \forall m$

TH1: $\begin{cases}y_0-x_0=0\\2x_0y_0-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=x_0\\x_0\ne\pm1\end{cases}$ TH2: $\begin{cases}y_0-x_0\ne 0\\ \dfrac{2x_0y_0-2}{x_0-y_0}=-2x_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0\ne x_0\\x_0=\pm1\end{cases}$.

Vậy tập hợp M là đường thẳng $y=x$ trừ hai điểm $(\pm1;\pm1)$; đường thẳng $x=-1$ trừ điểm $(-1;-1)$ và đường thẳng $x=1$ trừ điểm $(1;1)$.

Bài 10:

2. Tìm các điểm trên (C) có tọa độ nguyên.

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$.

Với $x\in\mathbb{Z}$ thì: $y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2\,\vdots\,(x-1)\Leftrightarrow(x-1)\in\{-1;1;-2;2\}$.

$x-1=1\Rightarrow x=2,y=3$.

$x-1=-1\Rightarrow x=0,y=-1$.

$x-1=-2\Rightarrow x=-1,y=0$.

$x-1=2\Rightarrow x=3,y=2$

Vậy các điểm trên có tọa độ nguyên là (2;3), (0;-1); (-1;0); (3;2).

3. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) là một số không đổi.

$M\in(C)\Rightarrow M(x_0;1+\dfrac{2}{x_0-1})$.

Tiệm cận đứng của (C): d_1: $x-1=0$, tiệm cận ngang của (C): d_2: $y-1=0$.

$d(M,d_1)=|x_0-1|$, $d(M,d_2)=\left|1+\dfrac{2}{x_0-1}-1\right|=\left|\dfrac{2}{x_0-1}\right|$.

$d(M,d_1).d(M,d_2)=|x_0-1|.\left|\dfrac{2}{x_0-1}\right|=2$ (đpcm).

4. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

$M(x_0;1+\dfrac{2}{x_0-1})\in(C)$, suy ra

$$T=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-1|+\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\overset{\text{Côsi}}{\ge}2\sqrt{|x_0-1|.\left|\frac{2}{x_0-1}\right|}=2\sqrt{2}$$

$$T=2\sqrt{2}\Leftrightarrow|x_0-1|=\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\Leftrightarrow(x_0-1)^2=2\Leftrightarrow x_0-1=\pm\sqrt{2}\Leftrightarrow x_0=1\pm\sqrt{2}$$

Suy ra $\min T=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x_0=1\pm\sqrt{2}$.

Bài 11:

2. Ta có: $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

*Nếu $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

* Nếu $m \neq \frac{1}{3}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận

$d_1: x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0$ và $d_2: y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}(1;0)$, $\overrightarrow{n_2}(m;-1)$ lần lượt là véc tơ pháp của d_1 và d_2.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng $45^0 \Leftrightarrow \cos 45^0 = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Bài 12:

2. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow m\left(-\frac{m}{2}\right) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2 \neq 0$ đúng $\forall m$.

Khi đó đường thẳng $x = -\frac{m}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$ là giá trị cần tìm.

3. Ta có: $y' = \frac{m^2+2}{(2x+m)^2} > 0 \quad \forall x \neq -\frac{m}{2}$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bài 13:

2. Ta có I(1;1)

Thực hiện phép dời hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$

Công thức dời trục: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

Ta có: $Y + 1 = 2(X+1) - 1 + \frac{2}{X} \Rightarrow Y = 2X + \frac{2}{X}$

Vì $Y(-X) = -Y(X) \Rightarrow$ trong hệ tọa độ IXY hàm số đã cho là hàm số lẻ nên (C) nhận I làm tâm đối xứng.

3. Lấy $M\left(x_0; 2x_0 - 1 + \frac{2}{x_0 - 1}\right)$

$d_1 = d(M, TCX) = \frac{\left|2x_0 - \left(2x_0 - 1 + \frac{2}{x_0-1}\right) - 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}|x_0 - 1|}$

$d_2 = d(M, TCD) = |x_0 - 1|$, suy ra $d_1.d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ không phụ thuộc vào M.

Bài 14:

2. Tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên ta có

$y'(x_0) = \pm 1$, mà $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$.

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = -x + 1, y = -x + 5$.

3. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$.

Δ cắt TCĐ: $x = 1$ tại $A(1; \frac{2x_0}{x_0 - 1})$ và cắt TCN tại $B(2x_0 - 1; 2)$

Gọi I(1;2), suy ra tam giác ABI có diện tích

$S = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}.\frac{2}{|x_0 - 1|}.2|x_0 - 1| = 2$ (không đổi).

Bài 15:

2. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4x + 4 - m^2}{(x-2)^2}$. Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình g(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 = m^2 > 0 \\ 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$.

Nghiệm của $g(x) = 0$ là $x_1 = 2 - m$, $x_2 = 2 + m$, suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2 - m; 4 - m)$, $B(2 + m; 4 + 3m)$

$d(A,\Delta) = \frac{|9 - 3m|}{\sqrt{5}}$, $d(B,\Delta) = \frac{|9 + 5m|}{\sqrt{5}}$.

$d(A,\Delta) = d(B,\Delta) \Leftrightarrow |9 - 3m| = |9 + 5m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 - 3m = 9 + 5m \\ 9 - 3m = -9 - 5m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -9 \end{array}\right.$

So với điều kiện $m \neq 0$ nhận $m = -9$.

Bài 16:

2.a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn AB.

Chú ý. Với hàm số mà đồ thị (C) của nó có tâm đối xứng là I thì khi giải các bài toán liên quan đến đồ thị (C) mà gặp các bước tính toán phức tạp thì ta nên chuyển hệ trục tọa độ bằng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, khi đó đối với hệ tọa độ IXY, hàm số sẽ có dạng đơn giản hơn và như vậy việc tính toán của chúng ta sẽ dễ dàng hơn.

Áp dụng chú ý trên vào bài toán để giải câu 2).

Tịnh tiến hệ tọa độ xuất phát Oxy theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$ thành hệ tọa độ IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x = X + x_I = X + 1 \\ y = Y + y_I = Y + 4 \end{cases}$.

Đối với hệ tọa độ IXY, hàm số đã cho trở thành

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$Y+4=\dfrac{2-4(X+1)}{1-(X+1)} \Leftrightarrow Y+4=\dfrac{-2-4X}{-X}=\dfrac{2}{X}+4 \Leftrightarrow Y=F(X)=\dfrac{2}{X}$.

Phương trình của tiệm cận đứng: $X=0$.

Phương trình của tiệm cận ngang: $Y=0$.

$M\in(C)\Rightarrow M(X_0;Y_0)$ với $Y_0=\dfrac{2}{X_0}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M.

$$Y=F'(X)(X-X_0)+Y_0=-\frac{2}{X_0^2}(X-X_0)+\frac{2}{X_0} \Leftrightarrow Y=-\frac{2}{X_0^2}X+\frac{4}{X_0}$$

Tọa độ giao điểm A của (d) với tiệm cận đứng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} X=0 \\ Y=-\dfrac{2}{X_0^2}X+\dfrac{4}{X_0} \end{cases} \Rightarrow A(0;\frac{4}{X_0})$$

Tọa độ giao điểm B của (d) với tiệm cận ngang là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} Y=0 \\ Y=-\dfrac{2}{X_0^2}X+\dfrac{4}{X_0} \end{cases} \Rightarrow B(2X_0;0)$$

Vì A,M,B thẳng hàng và $X_A+X_B=2X_0$ nên M là trung điểm của AB.

b) Chứng minh tam giác IAB có diện tích không đổi.

Tam giác IAB vuông tại I do đó: $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{4}{X_0}\right||2X_0|=4$ trong đó I(0;0)

Vậy S_{IAB} không đổi.

c) Tìm điểm M sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Chu vi tam giác IAB: $P=IA+IB+AB=|Y_A|+|X_B|+\sqrt{(X_A-X_B)^2+(Y_A-Y_B)^2}$

$$=\left|\frac{4}{X_0}\right|+|2X_0|+\sqrt{4X_0^2+\frac{16}{X_0^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\left|\dfrac{4}{X_0}\right|+|2X_0|\ge 2\sqrt{\left|\dfrac{4}{X_0}\right||2X_0|}=4\sqrt{2}$

$$4X_0^2+\frac{16}{X_0^2}\ge 2\sqrt{4X_0^2.\frac{16}{X_0^2}}=16 \Rightarrow P\ge 4\sqrt{2}+16.$$

$$P=4\sqrt{2}+16 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{4}{X_0}\right|=|2X_0| \\ \dfrac{16}{X_0^2}=4X_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{16}{X_0^2}=4X_0^2 \Leftrightarrow X_0^4=4 \Leftrightarrow X_0=\pm\sqrt{2}.$$

Vậy $\min P=16+4\sqrt{2}$ đạt được khi và chỉ khi $M\left(1-\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right)$ hoặc $M\left(1+\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right)$.

Bài 17:

2. Tìm các điểm thuộc (C) cách đều hai trục tọa độ.

M là một điểm thuộc (C) $\Rightarrow M(x_0;y_0)$ với $y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1}$.

Khoảng cách từ M đến các trục Ox, Oy lần lượt là $|y_0|$, $|x_0|$.

Suy ra tọa độ điểm M thuộc (C) và cách đều hai trục tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \\ |y_0|=|x_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \quad (1) \\ y_0=\pm x_0 \end{cases}$$

Thay $y_0=x_0$ vào phương trình (1) ta được: $x_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Thay $y_0=-x_0$ vào phương trình (1) ta được: $-x_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

3. Tìm các điểm thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó ngắn nhất.

Gọi A, B là hai điểm lần lượt thuộc nhánh phải và nhánh trái của (C), khi đó $x_A>-1$ và $x_B<-1$, suy ra: $A\left(-1+a;2-\dfrac{1}{a}\right)$; $B\left(-1-b;2+\dfrac{1}{b}\right)$ $(a>0,b>0)$.

$$AB^2=(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \overset{\text{Côsi}}{\ge} (2\sqrt{ab})^2\left(2\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)^2=16.$$

$$AB^2=16 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \dfrac{1}{ab}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1.$$

Bài 18:

1. $y=mx-1+\dfrac{1}{x+2}$. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

a. $y'=m-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{m(x+2)^2-1}{(x+2)^2}$.

Với $m>0$ thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2. Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu khi $m>0$.

c. Xét (d) đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc k. Nên $(d): y=k(x-1)$

(d) tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $(x_0;y_0)$ khi hệ sau có nghiệm:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\begin{cases} x_0-1+\dfrac{1}{x_0+2}=k(x_0-1) \\ 1-\dfrac{1}{(x_0+2)^2}=k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{5}{9}.\text{ Vậy tiếp tuyến là } (d): y=\frac{5}{9}(x-1)$$

2.b. Tìm trên đường thẳng $y=4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số. Gọi $M(a;4)\in(d): y=4$ là điểm cần tìm.

Khi đó tiếp tuyến với (C) kẻ từ M có phương trình: $(\Delta): y=k(x-a)+4$.

(Δ) tiếp xúc với (C) tại điểm $(x_0;y_0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2+3}{x_0-1}=k(x_0-a)+4 & (1) \\ \dfrac{x_0^2-2x-3}{(x_0-1)^2}=k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0\neq 1.$$

Từ $(1),(2)\Rightarrow (3-a)x_0^2+2(a-7)x_0+3a+7=0 (3)$.

Để từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số. Khi phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_0\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-a\neq 0 \\ \Delta=(a-7)^2-(3a+7).(3-a)>0 \\ 3-a+2(a-7)+3a+7\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 3 \\ a^2-4a+7>0 \\ a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 3 \\ a\neq 1 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $(d): y=4$ bỏ đi các điểm $(1;4),(3;4)$.

Bài 19: Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2+(1-m)x-1=0 \quad (x\neq 0)$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB: $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-1}{6}$

$I\in Oy \Leftrightarrow x_1=0\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{6}=0\Leftrightarrow m=1$.

Bài 20. Tọa độ A, B thỏa: $\dfrac{x^2-1}{x}=-x+m\Leftrightarrow 2x^2-mx-1=0, \ (x\neq 0) \ (1)$

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 khác 0 với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)\Rightarrow AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=2(x_1-x_2)^2$

Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình (1) ta có được:

$$AB^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=\frac{m^2}{2}+4,\ AB=6\Leftrightarrow \frac{m^2}{2}+4=\sqrt{6}\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Bài 21. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$(k-1)x^2+(2k-3)x-1=0$ (với $x\neq -2$) (1)

Đồ thị (C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-1\neq 0 \\ \Delta=4k^2-8k+5>0\Leftrightarrow k\neq 1. \\ 1\neq 0 \end{cases}$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của $(1)\Rightarrow A(x_1;kx_1+1),\ B(x_2;kx_2+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_I=\dfrac{k(x_1+x_2)}{2}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{3-2k}{2(k-1)} \\ y_I=\dfrac{-k(2k-3)}{2(k-1)}+1 \end{cases}$$

Ta có: $x_I=\dfrac{3-2k}{2k-2}\Rightarrow k=\dfrac{2x_I+3}{2x_I+2},\ x_I\neq -1\Rightarrow y_I=\dfrac{2x_I^2-3x_I}{2x_I-2}+1=\dfrac{2x_I^2+3x_I+2}{2x_I+2}$

Vậy quỹ tích trung điểm là đường cong $y=\dfrac{2x^2+3x+2}{2x+2}$.

Bài 22.

1. Ta có $A\left(-1+a;a-4+\dfrac{1}{a}\right),\ B\left(-1-b;-b-4-\dfrac{1}{b}\right)$ với $a,b>0$ là hai điểm nằm về hai nhánh của (C)

$$AB^2=(a+b)^2+\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left(2+\frac{2}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}\right)\geq 8ab+8+\frac{4}{ab}\geq 8+8\sqrt{2}$$

Suy ra $AB\geq\sqrt{8+8\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ 8ab=\dfrac{4}{ab} \end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

2. Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình: $3x^2-mx-2-m=0 \ (*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2+12m+24>0 \\ 1\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-6+2\sqrt{3} \\ m<-6-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Bài 23. Gọi $M(x,y)\in(C)$ và $M'(x',y')\in(C')$ đối xứng qua đồ thị (C) qua điểm $A(3;4)$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=3 \\ \dfrac{y+y'}{2}=4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=6-x' \\ y=8-y' \end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Thay vào đồ thị $(C): 8-y'=\frac{(6-x')^2-(6-x')+1}{6-x'-1}=\frac{x'^2-11x'+31}{5-x'}$

Hay $y'=8-\frac{x'^2-11x'+31}{5-x'}=\frac{9+3x'-x'^2}{5-x'}$.

Vậy phương trình đồ thị $(C'): y=\frac{-x^2+3x+9}{-x+5}=\frac{x^2-3x-9}{x-5}$.

Bài 24: Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\frac{x_0^2+4x_0+5}{x_0+2}\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x+y+6=0$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\frac{4x_0^2+16x_0+17}{x_0+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}\right|\ge\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4|x_0+2|=\frac{1}{|x_0+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\frac{-3}{2}\Rightarrow y_0=\frac{5}{2}\\ x_0=\frac{-5}{2}\Rightarrow y_0=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thoả yêu cầu bài toán là $M_1\left(\frac{-3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{-5}{2};\frac{-5}{2}\right)$

Bài 25. Gọi $M(x;y), M'(x';y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}x+x'=1\\ y+y'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1-x\\ y'=2-y\end{cases}\Rightarrow M'(1-x;2-y)$.

Vì $M(x;y), M'(x';y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases}y=\frac{x^2-3x+6}{x-2}\\ 2-y=\frac{x^2+x+4}{-x-1}\end{cases}$

$\Rightarrow 2=\frac{x^2-3x+6}{x-2}+\frac{x^2+x+4}{-x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-6=0\\ x\ne-1, x\ne2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-4\\ x=3\Rightarrow y=6\end{array}\right.$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2;-4), M'(3;6)$.

TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $(x_0;y_0)$

Bài toán 01:

Bài 1:

1. Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=2x_0^3-3x_0^2+1$. Ta có: $y'=6x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=(6x_0^2-6x_0)(x-x_0)+2x_0^3-3x_0^2+1$.

Δ đi qua $P(0;8)\Leftrightarrow 8=-4x_0^3+3x_0^2+1\Leftrightarrow x_0=-1$. Vậy $M(-1;-4)$.

2. Ta có: $y=5\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow x=1; x=2; x=3$

Phương trình các tiếp tuyến: $y=2x+3$; $y=-x+7$; $y=2x-1$

3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k=4$

$\Rightarrow y'=4\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=-3; x=2$

* $x=-3\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=4(x+3)+\frac{1}{6}=4x+\frac{73}{6}$

* $x=2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=4(x-2)-\frac{2}{3}=4x-\frac{26}{3}$

4. Gọi $M(x_0;y(x_0))$, $x_0\ne-1$ là tọa độ tiếp điểm của d và (C)

Khi đó d có hệ số góc $y'(x_0)=\frac{1}{(x_0+1)^2}$ và có phương trình là:

$y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\frac{1}{x_0+1}$

Vì d cách đều A, B nên d đi qua trung điểm $I(-1;1)$ của AB hoặc cùng phương với AB.

TH1: d đi qua trung điểm $I(-1;1)$, thì ta luôn có:

$1=\frac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+2-\frac{1}{x_0+1}$, phương trình này có nghiệm $x_0=1$

Với $x_0=1$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

TH2: d cùng phương với AB, tức là d và AB có cùng hệ số góc, khi đó $y'(x_0)=k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$ hay $\frac{1}{(x_0+1)^2}=1\Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=0$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=x+5$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=x+1$.

5. Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của A tại N là:

$$y=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m$$

$$M\in(d)\Leftrightarrow 2x_0^3+5x_0^2-4x_0=3-3m \quad (*)$$

Dễ thấy $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị

$$y=3-3m \text{ và } f(x_0)=2x_0^3+5x_0^2-4x_0.$$

Xét hàm số $f(x_0)=2x_0^3+5x_0^2-4x_0$ có $f'(x_0)=6x_0^2+10x_0-4$

và $f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=\frac{1}{3}$.

Lập bảng biến thiên, suy ra $m=\frac{100}{81}, m=-3$

6. Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm phương trình:

$$\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}=0, m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m, m\neq 0\\(3m+1)x-m^2+m=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m, m\neq 0, m\neq -\frac{1}{3}\\x=\frac{m^2-m}{3m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0, m\neq -\frac{1}{3}\\x=\frac{m^2-m}{3m+1}\neq -m\end{cases}.$$

Mà $y'=\frac{4m^2}{(x+m)^2}\Rightarrow y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right)=\frac{4m^2}{\left(\frac{m^2-m}{3m+1}+m\right)^2}$.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $x-y-10=0$

nên $y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right)=1\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=-\frac{1}{5}$

* $m=-1$ giao điểm là $A(-1;0)$, tiếp tuyến là $y=x+1$.
* $m=-\frac{1}{5}$ giao điểm là $B\left(\frac{3}{5};0\right)$, tiếp tuyến là $y=x-\frac{3}{5}$.

7. Gọi $A\left(x_1, y(x_1)=x_1^3-6x_1^2+9x_1\right), B\left(x_2, y(x_2)=x_2^3-6x_2^2+9x_2\right)$ là tọa độ tiếp điểm của $(d),(t)$ và đồ thị (C). (d) và (t) song song với nhau khi

$$y'(x_1)=y'(x_2)\Leftrightarrow 3x_1^2-12x_1+9=3x_2^2-12x_2+9\Leftrightarrow x_1+x_2=4.$$

Với $x_1+x_2=4$ thì tồn tại $t>0$: $\begin{cases}x_1=2-t\Rightarrow y(x_1)=-t^3+3t+2\\x_2=2+t\Rightarrow y(x_2)=t^3-3t+2\end{cases}$

Dễ thấy trung điểm đoạn AB có tọa độ $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2\\y_0=\frac{y(x_1)+y(x_2)}{2}=2\end{cases}$.

8. $y'=3x^2-4x+m-1=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+m-\frac{7}{3}\geq m-\frac{7}{3}\Rightarrow y'\geq m-\frac{7}{3}\Rightarrow y'=m-\frac{7}{3}$ khi $x=\frac{2}{3}$

Theo bài toán ta có: $\left(m-\frac{7}{3}\right)(-1)=-1\Leftrightarrow m=\frac{10}{3}$.

9. Để tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đthẳng $x-y+2012=0$ khi và chỉ kh

$y'.1=-1$ hay $mx^2+2(m-1)x+3m-4=0$ có nghiệm $\forall\in\mathbb{R}$.

Đáp số: $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

10. Tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0=2\Rightarrow y_0=3$

Ta có $y'(x)=3x^2-3\Rightarrow y'(x_0)=y'(2)=9$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) là

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=9(x-2)+3\Rightarrow y=9x-15$$

Xét phương trình $x^3-3x+1=9x-15\Leftrightarrow x^3-12x+16=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x-8\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-4$ hoặc $x=2$ (không thỏa). Vậy $N(-4;-51)$ là điểm cần tìm

Bài 2:

1. Ta có $y'(x)=3x^2-4x+8$

Giả sử trái lại có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) vuông góc với nhau.

Gọi x_1,x_2 tương ứng là các hoành độ của hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó.

Gọi k_1,k_2 lần lượt là các hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm trên (C) có hoà độ x_1,x_2.

Khi đó $k_1.k_2=-1\Rightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1\Rightarrow\left(3x_1^2-4x_1+8\right)\left(3x_2^2-4x_2+8\right)=-1$ (1)

Tam thức $f(t)=3t^2-4t+8$ có $\Delta'<0$ nên $f(t)>0\forall t\in\mathbb{R}$ từ đó và từ (1) suy ra m thuẫn. Vậy, giả thiết phản chứng là sai, suy ra (đpcm)

2. Vì $M(1+\sin\alpha;9)$ nằm trên đồ thị (C) nên: $\frac{2(1+\sin\alpha)^2}{1+\sin\alpha-1}=9$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=2\end{array}\right.$. Vì $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};9\right)$.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là: $y=y'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+9$ hay $(d): y=-6x+18$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x=1$ tại: $A(1;12)$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tại điểm B có tọa độ là nghiệm $(x;y)$ hệ phương trình: $\begin{cases}y=-6x+18\\ y=2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}\Rightarrow B(2;6)$.

3. Gọi $A\in(C)\Rightarrow A\left(a;a^4+2a^2-3\right)$. Ta có: $y'=4x^3+4x\Rightarrow y'(a)=4a^3+4a$

Phương trình tiếp tuyến (t): $\left(4a^3+4a\right)x-y-3a^4-2a^2-3=0$

$d(M;(t))=\frac{5}{\sqrt{65}}$ hay $\frac{3a^4+2a^2}{\sqrt{\left(4a^3+4a\right)^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{65}}$ hay

$5(a-1)(a+1)\left(117a^6+193a^4+85a^2+5\right)=0$

4. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$, d có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$

Ta có $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$ hoặc $k=\frac{2}{3}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình $y'=k_1$ hoặc $y'=k_2$ có nghiệm x tức $\left[\begin{array}{l}3x^2+2(1-2m)x+2-m=\frac{3}{2}\text{ có nghiệm}\\ 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\frac{2}{3}\text{ có nghiệm}\end{array}\right.$

5. Dễ thấy, A, B là 2 điểm thuộc đồ thị với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Tiếp tuyến d_1 tại A: $(4m-4)x-y-4m+4=0$

Tiếp tuyến d_2 tại B: $(-4m+4)x-y-4m+4=0$

Đáp số: $m=0$, $m=2$, $m=\frac{15}{16}$, $m=\frac{17}{16}$.

6. Hàm số đã cho xác định với $\forall x\neq1$. Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}$ với $y'(x_0)=\frac{-4}{(x_0-1)^2}$ và $y_0=\frac{2x_0+2}{x_0-1}$

a. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1. Nên có: $\frac{-4}{(x_0-1)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=3,\ x_0=-1$

- Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow\Delta: y=-x-1$
- Với $x_0=3\Rightarrow y_0=4\Rightarrow\Delta: y=-x+7$

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+1$.

Nên có: $y'(x_0)=-4\Leftrightarrow\frac{-4}{(x_0-1)^2}=-4\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=2$

- Với $x_0=0\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow\Delta: y=-4x-2$
- Với $x_0=2\Rightarrow y_0=6\Rightarrow\Delta: y=-4x+14$

c. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ±1. Mặt khác: $y'(x_0)<0$, nên có: $y'(x_0)=-1$

Tức $\frac{-4}{(x_0-1)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=-1$ hoặc $x_0=3$.

- Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow\Delta: y=-x-1$
- Với $x_0=3\Rightarrow y_0=4\Rightarrow\Delta: y=-x+7$

d. Khoảng cách từ $M(x_0;y_0)$ đến trục Oy bằng 2

Suy ra $x_0=\pm2$, hay $M\left(-2;\frac{2}{3}\right)$, $M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ là: $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là: $y=-4x+14$

7. Ta có: $y'=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0)=\frac{-2}{(x_0-1)^2}$

a. Theo giả thiết, ta có: $y'(x_0)=-2\Leftrightarrow\frac{-2}{(x_0-1)^2}=-2$

$\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-1=1\\ x_0-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=4\\ x_0=0\Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

b. Theo giả thiết, ta có: $\frac{-2}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4$

c. Theo giả thiết, ta có: $\frac{-2}{(x_0-1)^2}=-\frac{2}{9}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=9$

d. Tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y=k(x-x_0)+y(x_0)$ với $k=y'(x_0)<0$, có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(k;-1)$, (d') có vectơ pháp tuyến là $\vec{m}=(4;3)$

$\cos 45^0=\frac{|\vec{n}.\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}\Leftrightarrow \frac{|4k-3|}{\sqrt{k^2+1}.5}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow k=-\frac{1}{7}$ thỏa đề bài.

Bài 3:

1. $y'(x_0)=2$ (trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (t) với (C)).

$\Leftrightarrow x_0^3+x_0=2\Leftrightarrow x_0^3+x_0-2=0\Leftrightarrow x_0=1$.

Phương trình (t): $y=y'(1)(x-1)+y(1)=2(x-1)+\frac{11}{4}=2x+\frac{3}{4}$

2. Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C)).

Phương trình (d): $y=(x_0^3+x_0)(x-x_0)+\frac{x_0^4}{4}+\frac{x_0^2}{2}+2=(x_0^3+x_0)x-\frac{3}{4}x_0^4-\frac{1}{2}x_0^2+2$

$\Leftrightarrow (x_0^3+x_0)x-y-\frac{3}{4}x_0^4-\frac{1}{2}x_0^2+2=0$, $d(A;(d))=\frac{9}{4\sqrt{5}}\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{3}{4}x_0^4-\frac{1}{2}x_0^2-1\right|}{\sqrt{(x_0^3+x_0)^2+1}}=\frac{9}{4\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow |3x_0^4+2x_0^2+4|\sqrt{5}=9\sqrt{x_0^2(x_0^2+1)^2+1}\Leftrightarrow 5(3x_0^4+2x_0^2+4)^2=81[x_0^2(x_0^2+1)^2+1]$

Đặt $t=x_0^2$, $t\ge 0$. Phương trình (1) trở thành: $5(3t^2+2t+4)^2=81[t(t+1)^2+1]$

$\Leftrightarrow 5(9t^4+4t^2+16+12t^3+24t^2+16t)=81t^3+162t^2+81t+81$

$\Leftrightarrow 45t^4-21t^3-22t^2-t-1=0\Leftrightarrow (t-1)(45t^3+24t^2+2t+1)=0$

$\Leftrightarrow t=1$ (do $t\ge 0$ nên $45t^3+24t^2+2t+1>0$). Với $t=1$, ta có $x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm 1$.

Bài 4:

1. Giao điểm của tiếp tuyến $d: y=-\frac{1}{2}x+2$ với trục Ox là $A(4;0)$, hệ số góc của $d: k=-\frac{1}{2}$ và $A(4;0)\in(C)\Leftrightarrow \frac{4a+b}{2}=0\Leftrightarrow 4a+b=0$.

Ta có: $y'=\frac{-2a-b}{(x-2)^2}\Rightarrow y(4)=\frac{-2a-b}{4}$

Theo bài toán thì: $k=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y'(4)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{-2a-b}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+b=2$

Giải hệ $\begin{cases}4a+b=0\\2a+b=2\end{cases}$ ta được $a=-1$, $b=4$

2. (C) có ba điểm cực trị, điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là $(0;3)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,b>0\\c=3\end{cases}$

Giao điểm của tiếp tuyến d và trục Ox là $B(\sqrt{3};0)$ và hệ số góc của d là $-8\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}B\in(C)\\y'(\sqrt{3})=-8\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a+3b+c=0\\4a(\sqrt{3})^3+2b\sqrt{3}=-8\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a+3b+c=0\\6a+b=-4\end{cases}$

Giải hệ $\begin{cases}c=3\\9a+3b+c=0\\6a+b=-4\end{cases}$ ta được $a=-1$, $b=2$, $c=3\Rightarrow y=-x^4+2x^2+3$

Bài 5: Gọi $M(x_0;y_0)$.

Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình: $y=(8x_0^3-8x_0)(x-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1$.

1. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x-48y+1=0$

Nên ta có: $y'(x_0).\frac{1}{48}=-1\Leftrightarrow y'(x_0)=-48$

$x_0^3-x_0+6=0\Leftrightarrow x_0=-2\Rightarrow y_0=15$. Phương trình $\Delta: y=-48(x+2)+15=-48x-81$.

2. Vì tiếp tuyến Δ đi qua $A(1;-3)$ nên ta có: $-3=(8x_0^3-8x_0)(1-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1$

$\Leftrightarrow 3x_0^4-4x_0^3-2x_0^2+4x_0-1=0\Leftrightarrow (x_0-1)^2(x_0+1)(3x_0-1)=0$

- $x_0=\pm 1\Rightarrow \Delta: y=-3$
- $x_0=\frac{1}{3}\Rightarrow \Delta: y=-\frac{64}{27}x-\frac{17}{27}$.

3. Giả sử Δ tiếp xúc với (C) tại điểm thứ hai $N(n;2n^4-4n^2-1)$ $(x_0\ne n)$

Suy ra: $\Delta: y=(8n^3-8n)(x-n)+2n^4-4n^2-1$

Nên ta có: $\begin{cases}8x_0^3-8x_0=8n^3-8n\\-6x_0^4+4x_0^2-1=-6n^4+4n^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+nx_0+n^2-1=0\\(x_0+n)(3x_0^2+3n^2-2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+x_0n+n^2-1=0\\x_0+n=0\end{cases}$ (I) hoặc $\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+x_0n+n^2-1=0\\3x_0^2+3n^2-2=0\end{cases}$ (II)

Ta có (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-n\\n=\pm 1\end{cases}$; (II) $\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+n^2=\frac{2}{3}\\x_0n=\frac{1}{3}\end{cases}$ vô nghiệm. Vậy $\Delta: y=-3$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 6:

1. Ta có $f'(x)=x^2-2x+2$. Giao điểm của (C) với trục Oy là A(0;1).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là

$y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)=f'(0).(x-0)+f(0)=2x+1$

2. *Cách 1.* Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$, suy ra phương trình (d) có dạng: $y=5x+m$.

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=5x+m \ (1)\\ x^2-2x+2=5 \ (2)\end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ trên, (2) $\Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$.

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $m=\frac{8}{3}$. Thay $x=3$ vào (1) ta được $m=-8$.

Cách 2. Tiếp tuyến (d) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$

Suy ra hệ số góc của (d): $k=5$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C), ta có:

$k=f'(x_0)\Leftrightarrow 5=x_0^2-2x_0+2\Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$.

Suy ra phương trình (d): $\left[\begin{array}{l}y=5(x+1)+f(1)=5x+\frac{8}{3}.\\ y=5(x-3)+f(3)=5x-8\end{array}\right.$

3. Vì tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên nó chỉ có thể vuông cân tại O, khi đó góc giữa tiếp tuyến (D) và trục Ox là 45^0, suy ra hệ số góc của (D) là $k_D=\pm 1$

Trường hợp $k_D=1$, khi đó phương trình (D): $y=x+a$. $(a\neq 0)$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=x+a \ (3)\\ x^2-2x+2=1 \ (4)\end{cases}$ có nghiệm.

(4) $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$. Thay $x=1$ vào phương trình (3) ta được $a=\frac{4}{3}$.

Trường hợp $k_D=-1$, khi đó phương trình (D): $y=-x+a$.

(D) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=-x+a \ (5)\\ x^2-2x+2=-1 \ (6)\end{cases}$ có nghiệm

(6) $\Leftrightarrow x^2-2x+3=0$. Phương trình này vô nghiệm nên hệ (5), (6) vô nghiệm, suy ra (D): $y=-x+a$ không tiếp xúc với (C).

Bài 7: Ta có: $y'=3x^2-4x+m-1$

1. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$ có phương trình

$y=(m-2)(x-1)+3m-2=(m-2)x+2m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}m-2=3\\ 2m\neq 10\end{cases}$ vô nghiệm.

2. Ta có: $y'=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+m-\frac{7}{3}=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+m-\frac{7}{3}\Rightarrow y'\geq m-\frac{7}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=\frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc có giá trị:

$k=m-\frac{7}{3}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k.2=-1\Leftrightarrow \left(m-\frac{7}{3}\right).2=-1\Leftrightarrow m=\frac{11}{6}$.

3. Gọi $A(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại A:

$y=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m$

$M\in\Delta\Leftrightarrow 2=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(1-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+5x_0^2-4x_0+3m-3=0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có đúng hai nghiệm phân biệt (1)

Xét hàm số: $h(t)=2t^3+5t^2-4t,\ t\in\mathbb{R}$

Ta có: $h'(t)=6t^2+10t-4\Rightarrow h'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}, t=-2$

Bài 8: Ta có: $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$.

Từ yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình $y'\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt, tức $mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có đúng 2 dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq\frac{1}{2}\\ 0<m<1\\ 0<m<\frac{2}{3}\end{cases}$ hay $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Bài 9: Gọi $M\left(m;\frac{2m+1}{m-1}\right)$ là tọa độ điểm cần tìm $(m\neq 1)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$d=\frac{\left|m+3\left(\frac{2m+1}{m-1}\right)-3\right|}{\sqrt{1^2+3^2}} \text{ hay } d=\frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{m^2+2m+6}{|m-1|}$$

Xét hàm số: $f(m)=\frac{m^2+2m+6}{|m-1|}=\begin{cases}\frac{m^2+2m+6}{-(m-1)} & \text{khi } m<1\\ \frac{m^2+2m+6}{m-1} & \text{khi } m>1\end{cases}$

Ta có: $f'(m)=0 \Leftrightarrow m=-2$ thỏa $m<1$ hoặc $m=4$ thỏa $m>1$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min d=\frac{2}{\sqrt{10}}$ khi $m=-2$ tức $M(-2;1)$.

Tiếp tuyến tại M là $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, tiếp tuyến này song song với Δ.

Bài toán 02: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH

Bài tập: Giả sử tiếp tuyến (d) của (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ Hệ số góc của (d) bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc của (d) là $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0\Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x_0=-1 & \left(y_0=\frac{3}{2}\right)\\ x_0=3 & \left(y_0=\frac{5}{2}\right)\end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2}\\ y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}\end{array}\right.$.

Bài toán 03: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B MÀ TIẾP TUYẾN TẠI A, B THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài 1:

1. $I(2;2)$, gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C)$, $x_0\neq 2$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Giao điểm của Δ với các tiệm cận: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Do $\cos\widehat{ABI}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ nên $\tan\widehat{ABI}=\frac{1}{4}=\frac{IA}{IB}\Leftrightarrow IB^2=16.IA^2\Leftrightarrow(x_0-2)^4=16$

$\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=4$

Tại $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

Tại $M\left(4;\frac{5}{3}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

2. Gọi $M(m;y_M)$, $N(n;y_N)$ là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C).

Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Tiếp tuyến tại N cắt hai tiệm cận tại C, D.

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y=y'(m).(x-m)+y_M$

$\Rightarrow A\left(1;\frac{2m+4}{m-1}\right), B(2m-1;2)$. Tương tự: $C\left(1;\frac{2n+4}{n-1}\right), D(2n-1;2)$.

Hai đường thẳng AD và BC đều có hệ số góc: $k=\frac{-3}{(m-1)(n-1)}$ nên AD // BC.

Vậy mọi điểm M, N thuộc 2 nhánh của (C) đều thoả mãn bài toán.

Bài 2:

1. $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\frac{1}{x+2}$. Ta có: $y'=1-\frac{1}{(x+2)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0+1+\frac{1}{x_0+2}$ (*)

Tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y=\left[1-\frac{1}{(x_0+2)^2}\right](x-x_0)+x_0+1+\frac{1}{x_0+2}$

Nếu $\Delta\cap x=-2$ tại điểm A, thì $y_A=-\frac{x_0}{x_0+2}\Rightarrow A\left(-2;-\frac{x_0}{x_0+2}\right)$

Nếu Δ cắt tiệm cận xiên tại điểm B thì

$$\left[1-\frac{1}{(x_0+2)^2}\right](x_B-x_0)+x_0+1+\frac{1}{x_0+2}=x_B+1\Leftrightarrow x_B=2x_0+2\Rightarrow y_B=x_B+1=2x_0+3$$

$\Rightarrow B(2x_0+2;2x_0+3)$

Nếu I là giao hai tiệm cận, thì I có tọa độ $I(-2;-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên tiệm cận đứng $x=-2$

Suy ra $H(-2;2x_0+3)$

Diện tích tam giác $AIB: S=\frac{1}{2}AI.BH=\frac{1}{2}|y_A-y_I|.|x_B-x_H|=\frac{1}{2}\left|-\frac{x_0}{x_0+2}+1\right||2x_0+2+2|$

Hay $S=\frac{1}{2}\frac{2}{|x_0+2|}.2|x_0+2|=2$ (đvdt)

Chứng tỏ S là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Gọi $M(m;2m+1)\in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có dạng: $y=k(x-m)+2m+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C): $k(x-m)+2m+1=\dfrac{x+3}{x-1}$

$\Leftrightarrow kx^2-[(m+1)k-2m]x+[mk-(2m+4)]=0$ (*)

Δ tiếp xúc với (C) ⇔ (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=[(m+1)k-2m]^2-4k[mk-(2m+4)]=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ g(k)=(m-1)^2k^2-4(m^2-m-4)k+4m^2=0 \end{cases}$

Qua $M(m;2m+1)\in d$ kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C)

$\Leftrightarrow g(k)=0$ có đúng 1 nghiệm $k\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=-32(m^2-m-2)=0; g(0)=4m^2\neq 0 \\ m-1=0\Rightarrow 16k+4=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Bài 3:

1. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} -x^3+3x+2=0 \\ -3x^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Vậy (C) tiếp xúc với Ox tại điểm có hoành độ $x=-1$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox.

$-x^3+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1, x=2$.

* $x=-1\Rightarrow y=0,\ y'(1)=0$ phương trình tiếp tuyến: $y=0$.

* $x=2\Rightarrow y=0, y'(2)=-9$ phương trình tiếp tuyến: $y=-9(x-2)=-9x+18$.

3. Xét điểm $M(m;0)\in Ox$.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y=k(x-m)$.

d là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ $\begin{cases} -x^3+3x+2=k(x-m) \\ -3x^2+3=k \end{cases}$ có nghiệm x

Thế k vào phương trình thứ nhất, ta được:

$3(x^2-1)(x-m)-(x^3-3x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-3(1+m)x+3m)-(x+1)(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)[2x^2-(3m+2)x+3m+2]=0$ (1)

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $2x^2-(3m+2)x+3m+2=0$ (2)

Để từ M kẻ được ba tiếp tuyến thì (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác −1, đồng thời phải có 2 giá trị k khác nhau và khác 0

(2) phải có hai nghiệm phân biệt khác −1 khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \Delta=(3m+2)(3m-6)>0 \\ 3m+3\neq 0 \\ k\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-\dfrac{2}{3}, m>2 \\ m\neq -1 \end{cases}$ (3)

Với điều kiện (3), gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của (2), khi đó hệ số góc của ba tiếp tuyến là $k_1=-3x_1^2+3,\ k_2=-3x_2^2+3,\ k_3=0$.

Để hai trong ba tiếp tuyến này vuông góc với nhau $k_1.k_2=-1$ và $k_1\neq k_2$

$k_1.k_2=-1\Leftrightarrow 9(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2-9(x_1+x_2)^2+18x_1x_2+10=0$ (i)

Mặt khác theo Định lí Viet $x_1+x_2=\dfrac{3m+2}{2};\ x_1x_2=\dfrac{3m+2}{2}$.

Do đó (i) $\Leftrightarrow 9(3m+2)+10=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{28}{27}$ thỏa điều kiện (3), kiểm tra lại ta thấy $k_1\neq k_2$

Cách 2: Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại N có phương trình:

$y=\left(-3x_0^2+3\right)(x-x_0)+y_0$. Δ đi qua $M\Leftrightarrow 0=\left(-3x_0^2+3\right)(m-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)(x_0+1)(x_0-m)-(x_0+1)^2(x_0-2)=0$

$\Leftrightarrow (x_0+1)\left[2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ 2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2=0 \end{array}\right.$ (a)

Từ M vẽ được đến (C) ba tiếp tuyến ⇔ (a) có hai nghiệm phân biệt khác −1, và có hai giá trị $k=-3x_0^2+3$ khác nhau và khác 0 điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \Delta=(3m+2)^2-8(3m+2)>0 \\ 2+2(3m+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+2)(3m-6)>0 \\ 3m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m<-\dfrac{2}{3}, m>2 \end{cases}$ (b).

Vì tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-1$ có hệ số góc bằng 0 nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(-3p^2+3)(-3q^2+3)=-1$ (trong đó p,q là hai nghiệm của phương trình (a)) $\Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p^2+q^2)+10=0\Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p+q)^2+18pq+10=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9(3m+2)^2}{4}-\dfrac{9(3m+2)^2}{4}+9(3m+2)+10=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{28}{27}$. Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

Bài 4. Ta có $y'=4x^3-4x$

Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình

$\Delta: y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+y_0$

1. Tiếp tuyến song song với $d: y=24x+1$ nên ta có:

$4x_0^3-4x_0=24\Leftrightarrow x_0^3-x_0-6=0\Leftrightarrow x_0=2\Rightarrow y_0=7$. Vậy $\Delta: y=24x-41$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Vì (C) nhận Oy làm trục đối xứng nên nếu d là một tiếp tuyến của (C) thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Oy cũng là tiếp tuyến của (C). Do đó, để từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến (C) thì trong ba tiếp tuyến đó phải có một tiếp tuyến vuông góc với Oy. Mà (C) có hai tiếp tuyến cùng phương với Ox là: $y=-2$ và $y=-1$. Đường thẳng này cắt Oy tại $M_1(0;-2)$, $M_2(0;-1)$.

Ta kiểm tra được qua M_1 chỉ vẽ đến (C) được một tiếp tuyến, còn từ M_2 vẽ đến (C) được ba tiếp tuyến.

Vậy $M(0;-1)$ là điểm cần tìm.

Bài toán 04: TIẾP TUYẾN CÓ HỆ SỐ GÓC NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

Bài tập: Ta có: $y'=3(x^2-2x-3)$

1. Do $y'=3\left[(x-1)^2-4\right]\ge -12 \Rightarrow \min y'=-12$, đạt được khi $x=1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-12x+2$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Hay $kx-y+b=0$, Với $k=y'(x_0)$. Theo bài ra ta có: $\cos\alpha=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$

$\Leftrightarrow 41(k-1)^2=50(k^2+1)\Leftrightarrow 9k^2+82k+9=0\Leftrightarrow k=-9, k=-\dfrac{1}{9}$.

- $k=-9\Leftrightarrow x_0^2-2x_0=0\Leftrightarrow x_0=0, x_0=2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y=-9x+1$ và $y=-9x-3$

- $k=-\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow 27x_0^2-54x_0-80=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{9\pm\sqrt{321}}{9}$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{9}\left(x-\dfrac{9\pm\sqrt{321}}{9}\right)+y(x_0)$.

3. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M:

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến đi qua A nên ta có phương trình

$6=3(x_0^2-2x_0-3)(-1-x_0)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+1$

$\Leftrightarrow x_0^3-3x_0-2=0\Leftrightarrow (x_0+1)^2(x_0-2)=0\Leftrightarrow x_0=-1, x_0=2$

- $x_0=-1\Rightarrow y=6$
- $x_0=2\Rightarrow y=-9x-3$.

Bài toán 05: TIẾP TUYẾN SONG SONG, VUÔNG GÓC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

Bài tập:

1. Gọi $A(a;f(a))$ là điểm thuộc đồ thị.

Khi đó tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k=3a^2+4a+1$

• Nếu $a=-\dfrac{1}{3}; a=-1$ hiển nhiên không có tiếp tuyến nào vuông góc với tiếp tuyến tại A.

• Nếu $k\ne 0$. Ta xét phương trình: $3x^2+4x+1+\dfrac{1}{3a^2+4a+1}=0$ (1).

Để tồn tại tiếp tuyến vuông góc với tiếp tuyến tại A thì (1) phải có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4-3\left(1+\dfrac{1}{3a^2+4a+1}\right)\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{3a^2+4a+1}-\dfrac{1}{3}\le 0\Leftrightarrow \dfrac{3a^2+4a-2}{3a^2+4a+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\dfrac{-2-\sqrt{10}}{3}\right]\cup\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$.

2. Gọi $M(m;-3m+2)\in d$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại $A(x_0;y_0): y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+2$

Tiếp tuyến đi qua M $\Leftrightarrow -3m+2=(3x_0^2-3)(m-x_0)+x_0^3-3x_0+2$

$\Leftrightarrow x_0^2(2x_0-3m)=0$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$.

Bài toán 06: TIẾP TUYẾN ĐỒ THỊ VÀ MỐI LIÊN HỆ TÍNH CHẤT TAM GIÁC

Bài 1:

1. Hai đường tiệm cận đứng và ngang của (C) có phương trình lần lượt là $x=2$, $y=2$, suy ra giao điểm của chúng là I(2;2).

Tịnh tiến $\overline{OI}$. Hệ trục Oxy $\Rightarrow$ Hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x=X+x_I=X+2\\ y=Y+y_I=Y+2\end{cases}$

Đối với hệ trục IXY.

Hai đường tiệm cận đứng và ngang của (C) có phương trình lần lượt là $X=0$, $Y=0$.

(C) có phương trình là $Y+2=\dfrac{2(X+2)+m}{X+2-2}\Rightarrow Y=F(X)=\dfrac{4+m}{X}$.

Gọi X_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với (C) thì phương trình (d) là

$Y=-\dfrac{m+4}{X_0^2}(X-X_0)+\dfrac{m+4}{X_0}=-\dfrac{m+4}{X_0^2}X+\dfrac{2m+8}{X_0}$.

Gọi A là giao điểm của (C) với đường tiệm cận đứng của nó thì $A\left(0;\dfrac{2m+8}{X_0}\right)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Gọi B là giao điểm của (C) với đường tiệm cận ngang của nó thì $B(2X_0;0)$

Diện tích tam giác vuông IAB do (d) tạo với hai đường tiệm cận là

$$S=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}|Y_A||X_B|=\frac{1}{2}\left|\frac{2m+8}{X_0}\right||2X_0|=|2m+8|.$$

$$S=2\Leftrightarrow|2m+8|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+8=2\\2m+8=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-5\end{array}\right.$$

2. Ta có $M(0;1-m)$ là giao điểm của (C_m) với trục tung

$y'=3x^2-m\Rightarrow y'(0)=-m$

Phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại điểm m là $y=-mx+1-m$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành và trục tung, ta có tọa độ $A\left(\frac{1-m}{m};0\right)$ và $B(0;1-m)$

Nếu $m=0$ thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này

Nếu $m\neq0$ ta có

$$S_{OAB}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right||1-m|=8\Leftrightarrow\frac{(1-m)^2}{|m|}=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\pm4\sqrt{5}\\m=-7\pm4\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bài 2:

1. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M: $y=\frac{-3}{(2x_0-1)^2}(x-x_0)+y_0$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung $\Rightarrow y_B=\frac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}$.

Từ đó trọng tâm G của ΔOAB có: $y_G=\frac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}$.

Vì $G\in d$ nên $\frac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}=2m-1$

Mặt khác: $\frac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}=\frac{6x_0^2-(2x_0-1)^2}{(2x_0-1)^2}=\frac{6x_0^2}{(2x_0-1)^2}-1\geq-1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm M thoả bài toán thì $2m-1\geq-\frac{1}{3}\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của m là $\frac{1}{3}$.

2. (C) có tiệm cận đứng $x=m$, tiệm cận ngang $y=2m$.

Giao điểm 2 tiệm cận là $I(m;2m)$ và $M\left(x_0;\frac{2mx_0+3}{x_0-m}\right)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại M: $y=-\frac{2m^2+3}{(x_0-m)^2}(x-x_0)+\frac{2mx_0+3}{x_0-m}$.

Δ cắt TCĐ tại $A\left(m;\frac{2mx_0+2m^2+6}{x_0-m}\right)$, cắt TCN tại $B(2x_0-m;2m)$.

Ta có: $IA=\left|\frac{4m^2+6}{x_0+m}\right|$; $IB=2|x_0-m|\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=4m^2+6=22\Leftrightarrow m=\pm4$.

3. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\frac{2x_0-3}{x_0-2}$ và $y'_0=-\frac{1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M: $y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq2\pi$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x_0-2)^2=\frac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y_0=1\\x_0=3\Rightarrow y_0=3\end{array}\right.$

Vậy $M(1;1)$ $M(3;3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán có thể mở rộng: Tìm những điểm trên (C) có hoành độ $x>2$ sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

HD: theo trên ta có: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2;2)\Rightarrow IA, IB$. Chu vi tam giác AIB là $P=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}$

Đẳng thức xảy ra khi $IA=IB$

Nếu trường hợp tam giác AIB không vuông thì $P=IA+IB+AB$, để tính AB ta cần đến định lý hàm số cosin $AB^2=IA^2+IB^2-2IA.IB\cos\left(\widehat{IA,IB}\right)$.

$P=IA+IB+\sqrt{AB^2}\geq2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{IA^2+IB^2-2IA.IB\cos\left(\widehat{IA,IB}\right)}$

$P\geq2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB-2IA.IB\cos\left(\widehat{IA,IB}\right)}$. Đẳng thức xảy ra khi $IA=IB$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 3: Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0}{x_0+1}\Rightarrow y'_0=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (t) của (C) tại M là: $y_0=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$.

Tiếp tuyến (t) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt $A\left(-x_0^2;0\right)$,

$B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$ sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$

khi đó $\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow OA.OB=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x_0^2.\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 4x_0^4-(x_0+1)^2=0$

$$\left[\begin{array}{l}2x_0^2+x_0+1=0\\2x_0^2-x_0-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-2\right).\\x_0=1\Rightarrow M(1;1)\end{array}\right.$$

Bài 4: Ta có: $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

Tiệm cận đứng: $x=1$; tiệm cận ngang: $y=2$; tâm đối xứng I(1;2)

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$\Delta: y=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$.

1. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+1$ nên ta có: $y'(x_0)=-4\Leftrightarrow\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}=-4\Leftrightarrow x_0=0, x_0=2$.

* $x_0=0\Rightarrow y_0=2\Rightarrow\Delta: y=-4x-2$

* $x_0=2\Rightarrow y_0=6\Rightarrow\Delta: y=-4x+14$.

2. Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ±1. Khi đó $\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}=\pm1\Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$

* $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow\Delta: y=-x-1$

* $x_0=3\Rightarrow y_0=4\Rightarrow\Delta: y=-x+7$

3. Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại

$$A:\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow A\left(1;\dfrac{2x_0+6}{x_0-1}\right)$$

Tiếp tuyến cắt tiệm ngang tại

$$B:\begin{cases}y=2\\2=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow B(2x_0-1;2)$$

Suy ra: $IA=\dfrac{8}{|x_0-1|}$; $IB=2|x_0-1|\Rightarrow IA.IB=16$

Chu vi tam giác IAB: $P=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}$

Mà $IA+IB\ge2\sqrt{IA.IB}=8$; $IA^2+IB^2\ge2IA.IB=32$. Nên $P\ge8+\sqrt{32}=8+4\sqrt2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow(x_0-1)^2=4\Leftrightarrow x_0=3, x_0=-1$

4. Tâm đối xứng I(1;2), $I\in\Delta\Leftrightarrow2=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow1=\dfrac{2}{x_0-1}+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0-1=x_0+3$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua I.

Bài 5: Ta có: $y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình

$$y=\frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+2}=\frac{4}{(x_0+2)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$$

1. Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=4x+3$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{4}{(x_0+2)^2}=4\\\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\ne3\end{cases}\Leftrightarrow x_0=-1; x_0=-3.$$

2. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến Δ với Ox, Oy

$$\text{Suy ra }A:\begin{cases}y=0\\\dfrac{4}{(x_0+2)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}x_0^2\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(-\frac{1}{2}x_0^2;0)$$

$$B:\begin{cases}x=0\\y=\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\end{cases}\Rightarrow B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right)$$

Vì $A,B\ne O\Rightarrow x_0\ne0$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Tam giác AOB vuông tại O nên $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\frac{x_0^4}{(x_0+2)^2}$

Suy ra $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{18}\Leftrightarrow\frac{x_0^4}{(x_0+2)^2}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 9x_0^4=(x_0+2)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x_0^2+x_0+2=0\ (vn)\\3x_0^2-x_0-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

* $x_0=1\Rightarrow y_0=\frac{2}{3},\ y'(x_0)=\frac{4}{9}$. Phương trình $\Delta: y=\frac{4}{9}x+\frac{2}{9}$

* $x_0=-\frac{2}{3}\Rightarrow y_0=-1,\ y'(x_0)=\frac{9}{4}$

Phương trình $\Delta: y=\frac{9}{4}(x+\frac{2}{3})-1=\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$.

3. Ta có tâm đối xứng I(–2;2)

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến $\Delta:\frac{4}{(x_0+2)^2}x-y+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}=0$:

$$d=\frac{8|x_0+2|}{\sqrt{(x_0+2)^4+16}}=8\sqrt{\frac{t}{t^2+16}},\text{ với } t=(x_0+2)^2\ge 0$$

Do $\frac{t}{t^2+16}\le\frac{t}{2\sqrt{16t^2}}=\frac{1}{8}\Rightarrow d\le 2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $t^2=16\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow(x_0+2)^2=4\Leftrightarrow x_0=0,x_0=-4$.

Bài 6: Giả sử (C) cắt Ox tại M(m;0) và N(n;0) cắt Oy tại A(0;c)

Tiếp tuyến tại M có phương trình: $y=(3m^2+2am+b)(x-m)$.

Tiếp tuyến đi qua A nên ta có: $3m^3+2am^2+bm+c=0$

$\Leftrightarrow 2m^3+am^2=0\Leftrightarrow m=-\frac{a}{2}$ (do $m^3+am^2+bm+c=0$)

Mà (C) cắt Ox tại hai điểm nên (C) tiếp xúc với Ox.

Nếu M là tiếp điểm thì suy ra Ox đi qua A vô lý nên ta có (C) tiếp xúc với Ox tại N.

Do đó: $y=x^3+ax^2+bx+c=(x-n)^2(x-m)$

Suy ra $\begin{cases}m+2n=-a\\2mn+n^2=b\\mn^2=-c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\frac{a}{2},n=-\frac{a}{4}\\a^3=32c\\5a^2=16b\end{cases}$ (1).

Mặt khác $S_{\Delta AMN}=1\Leftrightarrow -c|n-m|=2\Leftrightarrow -c|a|=8$

• $a>0$ ta có: $\begin{cases}a^3=32c\\ac=-8\\5a^2=16b\end{cases}$ vô nghiệm.

• $a<0$ ta có: $\begin{cases}a^3=32c\\ac=8\\5a^2=16b.\end{cases}\Leftrightarrow a=-4,b=5,c=-2$

Bài 7: Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}$.

1. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$ nên suy ra $-\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0=3,x_0=-1$.

2. Tiếp tuyến Δ cắt tiệm cận đứng tại $A(1;\frac{2x_0}{x_0-1})$, cắt đường tiệm cận ngang tại $B(2x_0-1;2)$. Tâm đối xứng I(1;2). Suy ra $IA=\frac{2}{|x_0-1|}, IB=2|x_0-1|\Rightarrow IA.IB=4$

Chu vi tam giác IAB: $p=AB+IA+IB=\sqrt{IA^2+IB^2}+IA+IB$

Mặt khác: $IA^2+IB^2\ge 2IA.IB=8;\ IA+IB\ge 2\sqrt{IA.IB}=4$

Nên $p\ge 2\sqrt{2}+4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1\Leftrightarrow x_0=2,x_0=0$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-x+5$ và $y=-x+1$.

3. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Ta có $d(I,\Delta)=IH$

Trong tam giác vuông IAB ta có: $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}\ge\frac{2}{IA.IB}=\frac{1}{2}$

Suy ra $IH\le\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-x+5$ và $y=-x+1$.

4. Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$, $\overrightarrow{IM}=(x_0-1;\frac{1}{x_0-1})$.

$IM\perp\Delta\Leftrightarrow x_0-1-\frac{1}{(x_0-1)^3}=0\Leftrightarrow x_0=0,x_0=2$.

Bài 8:

1. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm và d là tiếp tuyến của (C) có phương trình:

$$y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+1+\frac{1}{x_0-1}.$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Giả sử d cắt 2 tiệm cận của (C) tại $A\left(1;1+\frac{2}{x_0-1}\right)$, $B(2x_0-1;1)$

Chu vi tam giác IAB là $C=IA+IB+AB\ge 4+2\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1|=1$ tức $x_0=0$ hoặc $x_0=2$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm và d là tiếp tuyến của (C) có phương trình:

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}.$$

Giả sử d cắt 2 tiệm cận của (C) tại $A\left(-1;\frac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, $B(2x_0+1;2)$

$$IA^2+IB^2=40\Leftrightarrow\frac{36}{(x_0+1)^2}+4(x_0+1)^2=40$$

3. Ta có $y=\frac{2x-3}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}\Rightarrow y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$ và $I(2;2)$.

Tiếp tuyến (Δ) tại điểm có hoành độ x_0 là $y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+2+\frac{1}{x_0-2}$

(Δ) cắt tiệm cận đứng tại $E\left(2;2+\frac{2}{x_0-2}\right)$ và tiệm cận ngang tại $F(2x_0-2;2)$.

$$\overrightarrow{IE}=\left(0;\frac{2}{x_0-2}\right)\Rightarrow IE=\frac{2}{|x_0-2|},\ \overrightarrow{IF}=(2x_0-4;0)\Rightarrow IF=2|x_0-2|$$

$$P_{\Delta IEF}=IE+IF+EF=IE+IF+\sqrt{IE^2+IF^2}=\frac{2}{|x_0-2|}+2|x_0-2|+2\sqrt{\frac{1}{|x_0-2|^2}+|x_0-2|^2}$$

Hay $x_0=0$ hoặc $x_0=4$ hoặc $x_0=\frac{3}{2}$ hoặc $x_0=\frac{5}{2}$.

Bài 9:

1. Tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a\ne -2$ thuộc (C) có phương trình: $y=\frac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\frac{2a}{a+2}\Leftrightarrow 4x-(a+2)^2y+2a^2=0$

Tâm đối xứng của (C) là $I(-2;2)$.

$$d(I,d)=\frac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}}\le\frac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}}=\frac{8|a+2|}{2\sqrt{2}|a+2|}=2\sqrt{2}$$

$d(I,d)$ lớn nhất khi $(a+2)^2=4\Leftrightarrow a=-4$ hoặc $a=0$.

2. Lấy điểm $M\left(m;2+\frac{1}{m-2}\right)\in(C)$. Ta có: $y'(m)=-\frac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\ge 8$. Đẳng thức xảy ra khi $m=1$ hoặc $m=3$.

Vậy, điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3)$ hoặc $M(1;1)$.

Bài toán 07: TIẾP TUYẾN ĐỒ THỊ VÀ MỐI LIÊN HỆ ĐƯỜNG TRÒN

Bài tập:

Ta có: $y'=3x^2-m\Rightarrow y'(-1)=3-m$; $y(-1)=2m-2$. (C) có tâm $I(2;3)$, $R=2$.

Phương trình đường thẳng d tại $M(-1;2m-2)$: $y=(3-m)x+m+1$

$\Leftrightarrow(3-m)x-y+m+1=0$

$$d(I,d)=\frac{|4-m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\frac{|1+(3-m)|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}\le\frac{\sqrt{2}.\sqrt{(3-m)^2+1}}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\sqrt{2}<R$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=2$. Do đó $d(I,d)$ đạt lớn nhất $\Leftrightarrow m=2$

Tiếp tuyến d cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho AB ngắn nhất $\Leftrightarrow d(I,d)$ đạt lớn nhất $\Leftrightarrow m=2$, suy ra d: $y=x+3$.

Dạng 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị

Bài toán 01: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ ĐI QUA ĐIỂM CHO TRƯỚC

Bài 1: $\Delta: y=3x, y=\frac{4}{3}, y=-\frac{5}{9}x+\frac{128}{81}$

Bài 2: $\Delta: y=\frac{3}{2}, y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}, y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Bài 3: Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$ (trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$$y=(x_0^2+2x_0+3)(x-x_0)+\frac{x_0^3}{3}+x_0^2+3x_0-1=(x_0^2+2x_0+3)x-\frac{2}{3}x_0^3-x_0^2-1$$

$$A\left(0;\frac{1}{3}\right)\in d\Leftrightarrow\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x_0^3-x_0^2-1\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2+4=0\Leftrightarrow x_0=-2.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3x+\frac{1}{3}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Điểm cực tiểu của (C) là $A(0;-3)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$y = (-4x_0^3 + 8x_0)(x - x_0) - x_0^4 + 4x_0^2 - 3 \; = (-4x_0^3 + 8x_0)x + 3x_0^4 - 4x_0^2 - 3$

$A(0;-3) \in d \Leftrightarrow -3 = 3x_0^4 - 4x_0^2 - 3 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

Với $x_0 = 0$ thì phương trình d: $y = -3$

Với $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y = -\frac{16}{3\sqrt{3}}x - 3$

Với $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y = \frac{16}{3\sqrt{3}}x - 3$

3. Gọi $M_0(x_0;y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M_0 là

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 - 3x_0^2 + 2) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$

Do (d) đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9};-2\right)$ nên $-2 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 2) = (3x_0^2 - 6x_0)\left(\frac{23}{9} - x_0\right)$

$$\Leftrightarrow 6x_0^3 - 32x_0^2 + 46x_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(3x_0^2 - 10x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y = -2 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y = 9x - 25 \\ x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27} \end{array}\right.$$

4. Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = (3x_0^2 - 4x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4$

Vì (Δ) đi qua điểm $M(-4;-24)$ nên: $-24 = (3x_0^2 - 4x_0 + 1)(-4 - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4$

$\Leftrightarrow x_0^3 + 5x_0^2 - 8x_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -6$ hoặc $x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 2$.

Bài 4:

1. Đường thẳng Δ đi qua $M(6;4)$ với hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - 6) + 4$

Δ tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 $\begin{cases} x + \frac{1}{x-2} = k(x-6) + 4 & (1) \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0

Thay (2) vào (1) ta được: $x_0 + \frac{1}{x_0 - 2} = \left(1 - \frac{1}{(x_0-2)^2}\right)(x_0 - 6) + 4 \Leftrightarrow x_0 = 0; x_0 = 3$

2. Cách 1: Gọi $(x_0; y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d và (C), với $y(x_0) = \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$, tiếp tuyến d có hệ số góc $y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}$, $x_0 \neq 2$ và d có phương trình: $y = \frac{-4}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$

d đi qua điểm $A(-6;5)$ nên có $5 = \frac{-4}{(x_0-2)^2}(-6 - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$ phương trình này tương đương với $x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 6$

Cách 2: Phương trình d đi qua $A(-6;5)$ có hệ số góc k, khi đó d có phương trình là: $y = k(x + 6) + 5$

d tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ:

$\begin{cases} k(x_0 + 6) + 5 = \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} \\ k = -\frac{4}{(x_0 - 2)^2} \end{cases}$ có nghiệm x_0 hay $\begin{cases} 4x_0^2 - 24x_0 = 0 \\ k = -\frac{4}{(x_0 - 2)^2} \end{cases}$ có nghiệm x_0

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y = -x - 1$, $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{2}$.

3. Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 11$

Vì (Δ) đi qua điểm $I\left(\frac{29}{3};184\right)$ nên:

$184 = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)\left(\frac{29}{3} - x_0\right) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 11$

$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 32x_0^2 + 58x_0 + 260 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 13$ hoặc $x_0 = 5$ hoặc $x_0 = -2$.

Vậy, $y = 420x - 3876$; $y = 36x - 164$; $y = 15x + 39$

Bài 5:

1. Tiếp tuyến (d) của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 7$, suy ra phương trình (d) có dạng: $y = 9x + m \; (m \neq -7)$

(d) tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^3 + 3x_0^2 - 2 = 9x_0 + m & (1) \\ 3x_0^2 + 6x_0 = 9 & (2) \end{cases}$

có nghiệm x_0. (2) $\Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = -3$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = k(x-m) + 4 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$ (*)

Thay (2) vào (1) ta được: $(x+1)\left[2x^2 - (3m+2)x + 3m + 2\right] = 0$ (3)

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $2x^2 - (3m+2)x + 3m + 2 = 0$ (4)

Theo bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm x, đồng thời (2) có 2 giá trị k khác nhau, tức là phương trình (3) có nghiệm x phân biệt thỏa mãn 2 giá trị k khác nhau.

+ TH1: (4) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng $-1 \Leftrightarrow m = -1$

+ TH2: (4) có nghiệm kép khác $-1 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$ hoặc $m = 2$

Vậy các điểm cần tìm là: $(-1;4)$; $\left(-\frac{2}{3};4\right)$; $(2;4)$.

2. Gọi $M(m;2) \in (d)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M có dạng: $y = k(x-m) + 2$

Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm x:

$\begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 2 = k(x-m) + 2 & (1) \\ -3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$ (*).

Thay (2) và (1) ta được: $2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2 - (3m-1)x + 2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $f(x) = 2x^2 - (3m-1)x + 2 = 0$ (3)

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) $\Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm x phân biệt đồng thời (2) có 3 giá trị k khác nhau $\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt khác 2 và có giá trị x thỏa mãn phương trình (2) có 3 giá trị k khác nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \ \vee \ m > \frac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Vậy, $M(m;2) \in (d)$ với $\begin{cases} m < -1 \ \vee \ m > \frac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$ có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (C).

3. Đường thẳng (d) tiếp xúc đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ tại điểm $(x_0;y_0)$ khi và chỉ khi hệ: $\begin{cases} x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1 = k(x_0 - 2) + m \ (1) \\ 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = k \ (2) \end{cases}$

có nghiệm x_0. Thay (2) vào (1) ta được: $m = -2x_0^3 + 12x_0^2 - 24x_0 + 17 \ (3)$

Xét hàm số $f(x_0) = -2x_0^3 + 12x_0^2 - 24x_0 + 17$

Ta có $f'(x_0) = -6x_0^2 + 24x_0 - 24 = -6(x_0 - 2)^2 \leq 0, \forall \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $f(x_0) = -2x_0^3 + 12x_0^2 - 24x_0 + 17$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (3) luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

Vậy một điểm thuộc đường thẳng $x = 2$ luôn kẻ được một tiếp tuyến duy nhất đến đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Bài 3:

1. (d) có hệ số góc $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$. Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì: $y' = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + (4-3m) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ $(*)$

Theo bài toán, phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm âm.

Nếu $m = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa)

Nếu $m \neq 0$ thì dễ thấy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm là $x = 1$ hay $x = \frac{2-3m}{m}$

Do đó để $(*)$ có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

2. Ta có: $y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$; $d: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 2$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \end{array}\right.$. Vậy, với $m \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn bài toán.

3. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0;a)$ và có hệ số góc k: $y = kx + a$

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ: $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = kx + a \\ k = \frac{-3}{(x-1)^2} \end{cases}$ có nghiệm x

$\Rightarrow (1-a)x^2 + 2(a+2)x - (a+2) = 0$ (1) có nghiệm $x \neq 1$.

Để qua A có 2 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' = 3a + 6 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases}$ (2)

Khi đó ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2(a+2)}{a-1}$, $x_1x_2 = \frac{a+2}{a-1}$ và $y_1 = 1 + \frac{3}{x_1 - 1}$, $y_2 = 1 + \frac{3}{x_2 - 1}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía đối với trục hoành thì $y_1.y_2 < 0$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{3}{x_1-1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1.x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\dfrac{2}{3}$

Đối chiếu với điều kiện (2) ta được: $-\dfrac{2}{3}<a\neq 1$.

4. Phương trình đường thẳng (d) đi qua M(0;m) và có hệ số góc k: $y=kx+m$

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ: $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=kx+m\\ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm x

$\Rightarrow (m-1)x^2-2(m+1)x+m+1=0$ (1) có nghiệm $x\neq 1$.

Dễ thấy x = 1 không là nghiệm của hệ.

Để qua M có 1 tiếp tuyến thì (1) phải có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}m=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m\neq 1\\ \Delta'=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}, m=1 \Rightarrow k=-8$ hoặc $x=0, m=-1\Rightarrow k=-2$

Dễ thấy x = 1 không là nghiệm của 1.

Bài 4:

1. Gọi (d) là tiếp tuyến cần tìm phương trình và x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) thì hệ số góc của

$(d): k=y'(x_0)=-2x_0^2+2x_0+4=\dfrac{9}{2}-2\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{9}{2}\quad k=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$.

Vậy maxk $=\dfrac{9}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d): $y=\dfrac{9}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}x-\dfrac{25}{12}$.

2. Phương trình đường thẳng (D) đi qua điểm A(2;9) có hệ số góc k là $y=k(x-2)+9$

(D) tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ

$\begin{cases}-\dfrac{2x_0^3}{3}+x_0^2+4x_0-2=k(x_0-2)+9 & (1)\\ -2x_0^2+2x_0+4=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được: $-\dfrac{2x_0^3}{3}+x_0^2+4x_0-2=(-2x_0^2+2x_0+4)(x_0-2)+9$

$\Leftrightarrow 4x_0^3-15x_0^2+12x_0+9=0\Leftrightarrow x_0=3$. Thay $x_0=3$ vào (2) ta được k = - 8.

Bài 5:

1. Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}x+1$ suy ra phương trình (d) có dạng: $y=-\dfrac{3}{4}x+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2-x_0}=-\dfrac{3}{4}x_0+m\\ \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$ có nghiệm x_0

$\Rightarrow \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x_0=6\vee x_0=-2\Rightarrow (d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

2. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) đi qua A(2; - 2) có dạng: $y=k(x-2)-2$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2-x_0}=k(x_0-2)-2 & (1)\\ \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm

$\dfrac{x_0^2}{2-x_0}=\left(\dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}\right)(x_0-2)-2\Leftrightarrow x_0=-2\Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$

3. $\begin{cases}M\in(C)\\ d(M,Ox)=2d(M,Oy)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=\dfrac{x_M^2}{2-x_M}\\ |y_M|=2|x_M|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=\dfrac{x_M^2}{2-x_M}\\ y_M=\pm 2x_M\end{cases}$.

(*) $\begin{cases}y_M=\dfrac{x_M^2}{2-x_M}\\ y_M=2x_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=2x_M\\ 2x_M=\dfrac{x_M^2}{2-x_M}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=2x_M\\ 3x_M^2-4x_M=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=0\\ y_M=0\end{cases}\vee\begin{cases}x_M=\dfrac{4}{3}\\ y_M=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

Vì M không trùng với gốc tọa độ O nên chỉ nhận $M\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=8x-8$.

(*) $\begin{cases}y_M=\dfrac{x_M^2}{2-x_M}\\ y_M=-2x_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=-2x_M\\ -2x_M=\dfrac{x_M^2}{2-x_M}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=-2x_M\\ x_M^2-4x_M=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=4\\ y_M=-8\end{cases}$ (do M ≠ O).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=-8$.

Bài 6: Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là

$y=y'(-1)(x+1)+y(-1)=(12+7m)(x+1)-3m-4\Leftrightarrow y=(12+7m)x+4m+8$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

1. $A(0;8)\in(d)\Leftrightarrow 8=4m+8\Leftrightarrow m=0$.

2. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của (d) với trục Ox và Oy thì

$P\left(-\frac{4m+8}{12+7m};0\right)$, Q(0; 4m+8).

Diện tích: OPQ: $S=\frac{1}{2}OP.OQ=\frac{1}{2}\left|-\frac{4m+8}{12+7m}\right||4m+8|=\frac{|8m^2+32+32m|}{|12+7m|}$

$S=\frac{8}{3}\Leftrightarrow|8m^2+32m+32|=\frac{8}{3}|12+7m|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8m^2+32m+32=\frac{8}{3}(12+7m)\\8m^2+32m+32=-\frac{8}{3}(12+7m)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+\frac{5}{3}m=0\\3m^2+19m+24=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\vee m=-\frac{5}{3}\\m=\frac{-19\pm\sqrt{73}}{6}\end{array}\right.$$

Bài 7:

1. (C) tiếp xúc (P) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau có nghiệm x_0

$$\begin{cases}\frac{x_0^4}{4}-2x_0^2+4=x_0^2+m\\x_0^3-4x_0=2x_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\m=4\end{cases}\vee\begin{cases}x_0=\pm\sqrt{6}\\m=-5\end{cases}$$

2. Phương trình tiếp tuyến (d):

$$y=y'(a)(x-a)+\frac{a^4}{4}-2a^2+4=(a^3-4a)(x-a)+\frac{a^4}{4}-2a^2+4$$

$$=(a^3-4a)x-\frac{3a^4}{4}+2a^2+4$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{x^4}{4}-2x^2+4=(a^3-4a)x-\frac{3a^4}{4}+2a^2+4\Leftrightarrow x^4-8x^2-4(a^3-4a)x+3a^4-8a^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x^2+2ax+3a^2-8=0\ (3)\end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại hai điểm E,F khác M $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=a^2-3a^2+8>0\\6a^2-8\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<a<2\\a\neq\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}\ (*)$$

Tọa độ trung điểm I của E, F:

$$\begin{cases}x_I=\frac{x_E+x_F}{2}=-a\\y_I=(a^3-4a)(-a)-\frac{3a^4}{4}+2a^2+4\ \text{(do } I\in(d))\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=-a\\y_I=-\frac{7a^4}{4}+6a^2+4\end{cases}$$

$I\in(P):y=-x^2+4\Leftrightarrow-\frac{7a^4}{4}+6a^2+4=-a^2+4\Leftrightarrow7a^2(1-\frac{a^2}{4})=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\pm2\end{array}\right.$.

So với điều kiện (*) nhận a = 0.

Bài 8:

1. Hai đường cong đã cho tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=x_0^2+m\quad(1)\\\frac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=2x_0\quad(2)\end{cases}\text{ có nghiệm } x_0.$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x_0(2x_0^2-5x_0+4)=0\Leftrightarrow x=0$ thay vào (1) ta được $m=-1$.

2. (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm

$$x_0:\begin{cases}mx_0^3+(1-2m)x_0^2+2mx_0=3mx_0^3+3(1-2m)x_0+4m-2\\3mx_0^2+2(1-2m)x_0+2m=9mx_0^2+3(1-2m)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2mx_0^3-(1-2m)x_0^2+(3-8m)x_0+4m-2=0\quad(1)\\6mx_0^2-2(1-2m)x_0+3-8m=0\quad(2)\end{cases}\text{ có nghiệm } x_0$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow(x_0-1)(2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2)=0$

$\Leftrightarrow x_0=1$ hoặc $2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2=0$

- Với $x_0=1$ thay vào (2), ta có: $m=-\frac{1}{2}$.
- Với $2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2=0$ (*) ta có:

$$(2)\Leftrightarrow4mx_0^2-x_0+1-4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=\frac{1-4m}{4m}\end{array}\right.\quad(m\neq0 \text{ vì } m=0 \text{ hệ vô nghiệm})$$

Thay $x_0=\frac{1-4m}{4m}$ vào (*) ta được: $\frac{(1-4m)^2}{8m}-\frac{(1-4m)^2}{4m}+2-4m=0$

$$\Leftrightarrow48m^2-24m+1=0\Leftrightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{6}}{12}.$$

3. (Cm) tiếp xúc với (P) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ

$$\begin{cases}x_0^3-4mx_0^2+7mx_0-3m=x_0^2-x_0+1\quad(1)\\3x_0^2-8mx_0+7m=2x_0-1\end{cases}\text{ (A) có nghiệm } x_0.$$

Giải hệ (A), (1) $\Leftrightarrow x_0^3-(4m+1)x_0^2+(7m+1)x_0-3m-1=0$

$$\Leftrightarrow(x_0-1)(x_0^2-4mx_0+3m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0^2-4mx_0+3m+1=0\end{array}\right.$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Vậy (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ 3x_0^2 - 2(4m+1)x_0 + 7m + 1 = 0 \ (2) \end{cases} \vee \begin{cases} x_0^2 - 4mx_0 + 3m + 1 = 0 \\ 3x_0^2 - 2(4m+1)x_0 + 7m + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$

Thay $x_0 = 1$ vào (2) ta được $m = 2$.

Hệ $\begin{cases} 3x_0^2 - 2(4m+1)x_0 + 7m + 1 = 0 \ (2) \\ x_0^2 - 4mx_0 + 3m + 1 = 0 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 2(4m+1)x_0 + 7m + 1 = 0 \ (2) \\ 3x_0^2 - 12mx_0 + 9m + 3 = 0 \ (4) \end{cases}$

Trừ hai phương trình (2) và (4), vế với vế ta được.

$4mx_0 - 2x_0 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow (2m-1)x_0 = m + 1$ (5).

Khi $m = \frac{1}{2}$ thì (5) trở thành $0 = \frac{3}{2}$ (sai) do đó (5) $\Leftrightarrow x_0 = \frac{m+1}{2m-1}$. $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$

Thay $x_0 = \frac{m+1}{2m-1}$ vào phương trình (3), ta được

$$\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2 - 4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right) + 3m + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow 4m^3 - 11m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = -\frac{1}{4} \vee m = 1.$

Bài 9: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$$d: y = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}.$$

1. Vì d song song với đường thẳng $\Delta: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, nên ta có:

$$\frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3.$$

- $x_0 = -1 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.
- $x_0 = 3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

2. **Cách 1:** $M \in d \Leftrightarrow 3 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2}(-1 - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$

$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)^2 = (x_0^2 - 2x_0)(-x_0 - 1) + (x_0 - 1)(x_0^2 - x_0 + 1)$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{2}$.

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3$.
- Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = -3x$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua $M(-1;3)$, có hệ số góc k, khi đó phương trình có dạng: $y = k(x+1) + 3$

d tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = k(x_0 + 1) + 3 & (1) \\ \dfrac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta được: $\Leftrightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{2}$.

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3$.
- Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = -3x$.

3. Đồ thị có hai tiệm cận $x = 1$ và $y = x$ suy ra giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;1)$.

Cách 1: $I \in d \Leftrightarrow 1 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2}(1 - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$

$\Leftrightarrow x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 + x_0^2 - x_0 + 1 \Leftrightarrow 2 = 0$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào đi qua I.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua I, có hệ số góc k $\Rightarrow d: y = k(x-1) + 1$

d là tiếp xúc với đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} \dfrac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = k(x_0 - 1) + 1 \\ \dfrac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = k \end{cases}$

có nghiệm x_0

Thế k vào phương trình thứ hai ta được:

$\frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{x_0 - 1} + 1 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = x_0^2 - 2x_0 + x_0 - 1$ phương trình vô nghiệm

Vậy qua I không có tiếp tuyến nào kẻ đến (C).

4. Δ_m có hệ số góc $k_m = \frac{1}{m}$.

Số tiếp tuyến thỏa mãn bài toán chính là số nghiệm của phương trình:

$y'.k_m = -1 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x)}{m(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (*) (với điều kiện $x \neq$

* Nếu $m = -1 \Rightarrow$ (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ không có tiếp tuyến nào.

* Nếu $m \neq -1$: (*) có $\Delta' = (m+1)$ và (*) có nghiệm $x = 1$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

- Khi $m > -1 \Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có hai tiếp tuyến
- Khi $m < -1$ thì (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ không có tiếp tuyến nào.
- Khi $m = -1$ thì (*) có 1 nghiệm $\Rightarrow$ có 1 tiếp tuyến.

Bài 10:

1. (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ

$$\begin{cases} -x_0^3 + 2(m+1)x_0^2 - 5mx_0 + 2m = 0 \\ -3x_0^2 + 4(m+1)x_0 - 5m = 0 \end{cases} \text{(A) có nghiệm } x_0.$$

Giải hệ (A).

$$\text{(A)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-2)(x_0^2 - 2mx_0 + m) = 0 \\ 3x_0^2 - 4(m+1)x_0 + 5m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ 3x_0^2 - 4(m+1)x_0 + 5m = 0 \ (1) \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + m = 0 \\ 3x_0^2 - 4(m+1)x_0 + 5m = 0 \end{cases}$$

Thay $x_0 = 2$ vào (1) ta được $m = \frac{4}{3}$.

$$\text{Hệ } \begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + m = 0 \ (2) \\ 3x_0^2 - 4(m+1)x_0 + 5m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 6mx_0 + 3m = 0 \ (3) \\ 3x_0^2 - 4(m+1)x_0 + 5m = 0 \ (1) \end{cases}$$

Trừ hai phương trình (1) và (3), vế với vế ta được

$$(m-2)x_0 = -m \Leftrightarrow x_0 = -\frac{m}{m-2}.\ (m \neq 2)$$

Thay $x_0 = -\frac{m}{m-2}$ vào (2), ta được: $\frac{m^2}{(m-2)^2} + \frac{2m^2}{m-2} + m = 0$

$\Leftrightarrow 3m^3 - 7m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1 \vee m = \frac{4}{3}$. Vậy $m \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$.

2. (C_m) tiếp xúc với (d) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ

$$\begin{cases} x_0^4 - (m+1)x_0^2 + 4m = 3 \ (1) \\ 4x_0^3 - 2(m+1)x_0 = 0 \ (2) \end{cases} \text{(A) có nghiệm } x_0.$$

Giải hệ (A), (2) $\Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0^2 = \frac{m+1}{2}$. Thay $x_0 = 0$ vào (1) ta được $m = \frac{3}{4}$.

Thay $x_0^2 = \frac{m+1}{2}$ vào (1) ta được $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - \frac{(m+1)^2}{2} + 4m = 3$

$$\Leftrightarrow m^2 - 14m + 13 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 13.$$

Khi $m = \frac{3}{4}$ thì (C_m) tiếp xúc với (d) tại chỉ một điểm (0;3) nên $m = \frac{3}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi m= 1 thì $x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(\pm 1; 3)$.

Khi m = 13 thì $x_0^2 = 7 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{7}$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(\pm\sqrt{7}; 3)$.

Bài 11:

2. Tam giác OAB vuông tại O, H là hình chiếu vuông góc của O lên AB, suy ra

$$\begin{cases} OA^2 = AH.AB \\ OB^2 = BH.BA \end{cases} \Rightarrow \frac{OB^2}{OA^2} = \frac{HB}{HA} = 4 \Rightarrow \frac{OB}{OA} = 2 \Rightarrow \tan\widehat{OAB} = 2.$$

$\Rightarrow$ Hệ số góc của đường thẳng (d): $k = \pm 2$.

Khi k = 2, phương trình (d) có dạng $y = 2x + m$.

$$\text{(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x_0 - 4}{x_0 - 1} = 2x_0 + m \ (2) \\ \frac{2}{(x_0-1)^2} = 2 \ (3) \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0.$$

$$(3) \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

Thay $x_0 = 2$ vào (2) ta được $m = -4$.

Thay $x_0 = 0$ vào (2) ta được $m = 4$.

Vậy trong trường hợp này, phương trình tiếp tuyến (d) là $y = 2x \pm 4$.

Khi k = −2, phương trình (d) có dạng: $y = -2x + m$

$$\text{(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x_0 - 4}{x_0 - 1} = -2x_0 + m \ (4) \\ \frac{2}{(x_0-1)^2} = -2 \ (5) \end{cases} \Leftrightarrow \text{có nghiệm } x_0$$

Phương trình (5) vô nghiệm nên hệ trên vô nghiệm.

Vậy phương trình tiếp tuyến (d): $y = 2x \pm 4$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với (C), khi đó phương trình (d) có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{2}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 4}{x_0 - 1} = \frac{2}{(x_0-1)^2}x + \frac{2x_0^2 - 8x_0 + 4}{(x_0-1)^2}.$$

A là giao điểm của (d) với trục hoành $\Rightarrow A(-x_0^2 + 4x_0 - 2; 0)$.

B là giao điểm của (d) với trục tung $\Rightarrow B\left(0; \frac{2x_0^2 - 8x_0 + 4}{(x_0-1)^2}\right)$.

Diện tích tam giác OAB (vuông tại O):

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|-x_0^2 + 4x_0 - 2\right|.\left|\frac{2x_0^2 - 8x_0 + 4}{(x_0-1)^2}\right| = \frac{(x_0^2 - 4x_0 + 2)^2}{(x_0-1)^2}$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$S=4\Leftrightarrow \frac{(x_0^2-4x_0+2)^2}{(x_0-1)^2}=4\Leftrightarrow (x_0^2-4x_0+2)^2=4(x_0-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2-4x_0+2=2(x_0-1)\\ x_0^2-4x_0+2=-2(x_0-1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2-6x_0+4=0\\ x_0^2-2x_0=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3-\sqrt5 \vee x_0=3+\sqrt5\\ x_0=0\vee x_0=2\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d):

$$y=\frac{2}{(2-\sqrt5)^2}x-8+4\sqrt5,\ y=\frac{2}{(2+\sqrt5)^2}x-8-4\sqrt5,\ y=2x+4,\ y=2x-4.$$

Bài 12:

1. $\begin{cases} A\in Oy\\ OA=\dfrac92\end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A\left(0;\dfrac92\right)\\ A\left(0;-\dfrac92\right)\end{array}\right.$

Trường hợp 1. $A\left(0;\frac92\right)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (d) có dạng $y=kx+\frac92$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=kx_0+\dfrac92 & (2)\\ \dfrac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=k & (3)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (3) vào (2) ta được

$$\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=\frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}x_0+\frac92\Leftrightarrow \begin{cases} x_0\ne1\\ 2(x_0^2-3x_0)(1-x_0)=-2x_0^3+4x_0^2-6x_0+9(1-x_0)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0\ne1\\ 5x_0^2-18x_0+9=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3\\ x_0=\dfrac35\end{array}\right.$$

Thay $x_0=3$ vào (3) ta được $k=-\frac32$. Thay $x_0=\frac35$ vào (3) ta được $k=-\frac{27}{2}$.

Vậy trong trường hợp này, phương trình của (d) là $y=-\frac32x+\frac92, y=-\frac{27}{2}x+\frac92$.

Trường hợp 2: $A\left(0;-\frac92\right)$. Khi đó phương trình (d) có dạng: $y=kx-\frac92$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=kx_0-\dfrac92 & (4)\\ \dfrac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=k & (5)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (5) vào (4), ta được:

$$\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=\frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}x_0-\frac92\Leftrightarrow\begin{cases} x_0\ne1\\ 2(x_0^2-3x_0)(1-x_0)=-2x_0^3+4x_0^2-6x_0-9(1-x_0)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_0\ne1\\ 13x_0^2+18x_0+9=0\ (vn)\end{cases}$$

Do đó trong trường hợp này không có tiếp tuyến (d) thỏa mãn đề bài.

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) cần tìm là $y=-\frac32x+\frac92, y=-\frac{27}{2}x+\frac92$.

3. a. Phương trình đường thẳng MN: $\frac{y-y_M}{y_M-y_N}=\frac{x-x_M}{x_M-x_N}\Leftrightarrow y=-3x+3.$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng MN.

$$\frac{x^2-3x}{1-x}=-3x+3\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-3x+3=0\ (vn)\\ x\ne1\end{cases}$$

Suy ra đường thẳng MN và (C) không có điểm chung.

b. Tiếp tuyến (D) song song đường thẳng MN suy ra phương trình (D) có dạng $y=-3x+m\ (m\ne3)$

(D) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=-3x_0+m\ (6)\\ \dfrac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=-3\ (7)\end{cases}$ có nghiệm x_0

$$\Rightarrow\frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=-3\Leftrightarrow\begin{cases} x_0\ne1\\ -x_0^2+2x_0-3=-3(1+x_0^2-2x_0)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=0\\ x_0=2\end{array}\right.$$

Thay $x_0=0$ vào (6) ta được $m=0$.

Thay $x_0=2$ vào (6) ta được $m=8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-3x$, $y=-3x+8$

Khi $m=0$ thì tiếp điểm của tiếp tuyến (D) với (C) là O(0;0).

Khi $m=8$ thì tiếp điểm của tiếp tuyến (D) với (C) là K(2;2).

Vì đường thẳng MN và (C) không có điểm chung và $d(O,MN)=\frac{3}{\sqrt{10}}<d(K,MN)=\frac{5}{\sqrt{10}}$

Mặt khác $S_{EMN}=\frac12 MN.d(E,MN)$, độ dài MN không đổi, do đó

S_{EMN} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ d(E,MN) nhỏ nhất $\Leftrightarrow E\equiv O$.

Vậy điểm cần tìm là gốc tọa độ O.

Bài 13: Xét $M(0;m)\in Oy$. Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y=kx+m$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

d là tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ

$$\begin{cases} x_0+\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}=kx_0+m \\ 1+\dfrac{4x_0+1}{\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}}=k \end{cases}$$ có nghiệm x_0.

Thay k vào phương trình thứ nhất ta được:

$$x_0+\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}=x_0+\frac{4x_0^2+x_0}{\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}}+m$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2+2x_0+1=4x_0^2+x_0+m\sqrt{4x_0^2+2x_0+1} \Leftrightarrow m=\frac{x_0+1}{\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}}=f(x_0)\ (*)$$

Để từ M kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị $\Leftrightarrow$ (*) có ít nhất một nghiệm.

Xét hàm số $f(x_0)$, ta có: $f'(x_0)=\dfrac{-3x_0}{(\sqrt{4x_0^2+2x_0+1})^3} \Rightarrow f'(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=0$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_0)=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x_0)=-\dfrac{1}{2}$ và (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m\le 1$.

Vậy M(0;m) với $-\dfrac{1}{2}<m\le 1$ là những điểm cần tìm.

Bài 14:

1. Tiệm cận đứng của (C): x = 1, tiệm cận xiên của (C): y = 2x – 1, suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận này là I(1;1).

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) đi qua I: y = k(x – 1) + 1.

(d) tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1+\dfrac{2}{x-1}=k(x-1)+1 \quad (1) \\ 2-\dfrac{2}{(x-1)^2}=k \quad (2) \end{cases}$$ có nghiệm x_0.

Thay $2-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}=k$ vào (1) ta được

$$2x_0-1+\frac{2}{x_0-1}=\left(2-\frac{2}{(x_0-1)^2}\right)(x_0-1)+1 \Leftrightarrow \frac{4}{(x_0-1)}=0 \quad (3)$$

Phương trình (3) vô nghiệm nên không tồn tại tiếp tuyến của (C) đi qua I.

2. Hai tiếp tuyến của (C) tại M_1M_2 song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_1)=y'(x_2) \\ y(x_1)\ne y(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow 2-\frac{2}{(x_1-1)^2}=2-\frac{2}{(x_2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \Leftrightarrow x_1-1=1-x_2 \ (\text{do } x_1\ne x_2) \Leftrightarrow x_1+x_2=2.$$

Gọi E là trung điểm của đoạn M_1M_2 thì

$$\begin{cases} x_E=\dfrac{x_1+x_2}{2}=1 \\ y_E=\dfrac{1}{2}\left(2x_1-1+\dfrac{2}{x_1-1}+2x_2-1+\dfrac{2}{x_2-1}\right) \end{cases} y_E=\frac{1}{2}\left[2(x_1+x_2)-2+\frac{2}{x_1-1}+\frac{2}{x_1-1}\right]=1$$

Vậy E(1;1) $\Rightarrow$ E = I $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 15:

1. Phương trình: $4x^3-3x+2a^2-3a=0$ tương đương với phương trình:

$$-4x^3+3x+2=2a^2-3a+2.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm và một nghiệm dương khi và chỉ khi đường thẳng $y=2a^2-3a+2$ cắt đồ thị $y=-4x^3+3x+2$ tại ba điểm trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương.

Từ đồ thị suy ra: $1<2a^2-3a+2<2$ tức ta có hệ:

$$\begin{cases} 0<2a^2-3a+1 \\ 2a^2-3a<0 \end{cases} \text{ hay } 0<a<\frac{1}{2} \text{ hoặc } 1<a<\frac{3}{2}.$$

2. Giả sử $M(m;3)$ là điểm cần tìm và d là đường thẳng qua M có hệ số góc là k, phương trình có dạng: $y=k(x-m)+3$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $N(x_0;y_0)$ khi hệ:

$$\begin{cases} -4x_0^3+3x_0+2=k(x_0-m)+3 \\ (-4x_0^3+3x_0+2)'=[k(x_0-m)+3]' \end{cases}$$ có nghiệm x_0, từ hệ suy ra

$$(2x_0-1)\left[4x_0^2-2(3m-1)x_0-3m+1\right]=0 \quad (1)$$ có nghiệm x_0.

Qua M kẻ được 3 đường thẳng tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm x_0, tức phương trình $4x_0^2-2(3m-1)x_0-3m+1=0$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{1}{2}$ hay $m<-1$ hoặc $\dfrac{1}{3}<m\ne\dfrac{1}{2}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

TƯƠNG GIAO HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT TRỤC HOÀNH

Bài toán 01: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 1, 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT

Bài 1:

1. **Cách 1:** Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục Ox:

$x^3+mx+2=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{x}=-m$. $f(x)=x^2+\frac{2}{x} \Rightarrow f'(x)=2x-\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m<3 \Leftrightarrow m>-3$

Cách 2: Để đồ thị hàm số (1) cắt Ox tại duy nhất một điểm ta có các trường hợp sau:

TH1: Đồ thị hàm số (1) không có cực trị hay là hàm số (1) luôn đồng biến (do $a=1>0$) trên R $\Leftrightarrow y'=3x^2+m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\ge 0$

TH2: Đồ thị hàm số (1) có hai giá trị cực trị cùng dấu $y'=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{m}{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{m}{3}}$

với $m<0$. Hai giá trị cực trị là: $y_1=2+\frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$; $y_2=2-\frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$

$\Rightarrow y_1.y_2=4+\frac{4m^3}{27}>0 \Leftrightarrow -3<m<0$. Vậy $m>-3$ là những giá trị cần tìm.

2. $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$ và có $\Delta'_{y'}=9(m+1)^2-36m=9(m-1)^2$

Nếu $m=1$ thì $y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

và $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=-\infty$

$\Rightarrow$ đồ thị cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $\Rightarrow$ $m=1$ thoả mãn.

Nếu $m\ne 1$ thì hàm số có các điểm cực trị x_1, x_2 (x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $y'=0$) $\Rightarrow x_1+x_2=m+1; x_1x_2=m$.

Lấy y chia cho y' ta được: $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{m+1}{6}\right)y'-(m-1)^2x-2+m(m+1)$.

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-(m-1)^2x-2+m(m+1)$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2)>0$

$\Leftrightarrow \left(-(m-1)^2x_1-2+m(m+1)\right).\left(-(m-1)^2x_2-2+m(m+1)\right)>0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2(m^2-2m-2)<0 \Leftrightarrow m^2-2m-2<0$ (vì $m\ne 1$) $\Leftrightarrow 1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3}$.

Bài 2:

1. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2-(2m-1)x+4m+2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2m-1)=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $f(x)=x^2-x-2m-1=0$

(d): tiếp xúc đồ thị (C) của hàm số tại hai điểm phân biệt khi phương trình $f(x)=0$ phải có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $2\ne x_1=x_2$ hoặc $x_1=2\ne x_2$

TH1: $2\ne x_1=x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=0\\ -\frac{b}{2a}\ne 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8m+5=0\\ \frac{1}{2}\ne 2\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{5}{8}$

TH2: $x_1=2\ne x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ f(2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8m+5>0\\ -2m+1=0\end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị của hàm số với trục Ox:

$x^4-2m^2x^2+m^4+2m=0$ (1). Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$, (1) trở thành:

$t^2-2m^2t+m^4+2m=0$ (2). Ta có: $\Delta'=-2m>0$ và $S=2m^2>0$ với mọi $m>0$.

Nên (2) có nghiệm dương $\Rightarrow$ (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt.

Bài 3:

1. Để (C_m) tiếp xúc Ox tại đúng 2 điểm phân biệt khi (C_m) có 2 cực trị đồng thời $y_{CĐ}=0$ hoặc $y_{CT}=0$. (C_m) có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 3x^2-3m^2=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Khi $m\ne 0$ thì $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm m$.

$y_{CĐ}=y(-m)=0 \Leftrightarrow 2m^3+2m=0 \Leftrightarrow m=0$ (loại)

$y_{CT}=y(m)=0 \Leftrightarrow -2m^3+2m=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=\pm1 \to m=\pm 1$

Bài 4: Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox:

$x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m$ (1) $\Rightarrow t^2-2(m+1)t+m^2-3m=0$ (2) $t=x^2\ge 0$

1. (C_m) và Ox có 4 điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-m^2+3m>0\\ m^2-3m>0\\ 2(m+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-\frac{1}{5}\\ m<0\vee m>3\\ m>-1\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5}<m<0\vee m>3.$

2. (C_m) và Ox có ba điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm.

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

$\Leftrightarrow \begin{cases}P=0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=0\vee m=3\\ m>-1\end{cases} \Leftrightarrow m=0\vee m=3.$

3. (C_m) và Ox có hai điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có đúng hai nghiệm.

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P<0 \\ \begin{cases} \Delta'=0 \\ S>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<3 \\ \begin{cases} m=-\frac{1}{5} \\ m>-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-\frac{1}{5} \vee 0<m<3.$

d. (C_m) và Ox không có điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc là có nghiệm và các nghiệm đều âm.

$\Leftrightarrow \Delta'<0 \vee \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ P>0 \\ S<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-\frac{1}{5} \vee \begin{cases} m>-\frac{1}{5} \\ m<0 \vee m>3 \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Vô nghiệm.

Bài toán 02: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN HOÀNH ĐỘ CHO TRƯỚC

Bài 1. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (*)

Đặt $t=x^2, t\ge 0$ thì (*) trở thành: $f(t)=t^2-2(m+1)t+2m+1=0$.

(C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3

$\Leftrightarrow f(t)$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 sao cho: $\left[\begin{array}{l} 0=t_1<t_2<3 \\ 0<t_1<3\le t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}, m\ge 1$

Bài 2. Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+m+3=0$ (1)

Đặt $t=x^2$ điều kiện $t\ge 0$. Phương trình trở thành $t^2+2mt+m+3=0$.(2)

Giả sử nếu phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2$ thì phương trình (1) sẽ có các nghiệm là $x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$.

Với lập luận trên bài toán trở thành tìm m để phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn: $t_1<1<4<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m-3>0 \\ S=-2m>0 \\ P=m+3>0 \\ t_1<1<4<t_2 \end{cases}$

Với $t_1<1<4<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1<1<t_2 \\ t_1<4<t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1-1)(t_2-1)<0 \\ (t_1-4)(t_2-4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0 \\ t_1t_2-4(t_1+t_2)+16<0 \end{cases}$

Bài 3:

1. Hàm số đã cho có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow (C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox:

$x^3-(4m+3)x^2+(m+2)x+3m=0 \Leftrightarrow (x-1)[x^2-2(2m+1)x-3m]=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x^2-2(2m+1)x-3m=0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

2. Đồ thị (C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị đồng thời $\begin{cases} y_{cd}.y_{ct}<0 \\ y(0)>0 \end{cases}$ (1).

Ta có: $y'=3[x^2-2(m+1)x+m] \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+m=0$ (*)

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-m>0 \Leftrightarrow m^2+m+1>0$ đúng $\forall m$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*).

Ta có: $y_1=\frac{1}{3}(x_1-m-1)y'(x_1)-2(m^2+m+1)x_1+m^2+1=-2(m^2+m+1)x_1+m^2+1$.

Tương tự $y_2=-2(m^2+m+1)x_2+m^2+1$.

$\Rightarrow y_1.y_2=(m+1)(m^3-m^2-m-3)$. Nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m^3-m^2-m-3)<0 \\ m<1 \end{cases}$ (2).

Xét hàm số $g(m)=m^3-m^2-m-3$, $m<1$

Có $g'(m)=3m^2-2m-1 \Rightarrow g(m)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}, m=1$

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(m)<0\ \forall m<1$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<1$ là những giá trị cần tìm.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y=-1$:

$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1 \Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$; phương trình trở thành: $t^2-(3m+2)t+3m+1=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3m+1$. Yêu cầu bài toán: $\begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}<m<1 \\ m\ne 0 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

4. $x^4-2mx^2+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=m-1$ hoặc $x^2=m+1$

Đồ thị (C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 $\Leftrightarrow 1<m<3$.

Bài 4:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox

$x^3-3mx^2+(3m-1)x+6m-6=0 \Leftrightarrow (x-2)[x^2-(3m-2)x-3m+3]=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x^2-(3m-2)x-3m+3=0$ (*)

(C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9m^2>0 \\ 11-9m\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in\left(-\infty;\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right) \\ m\ne\frac{11}{9} \end{cases}$.

http://sachxua.edu.vn

Khi đó $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3=(x_1+x_2)^2+4=(3m-2)^2+4$ www.facebook.com/daykem.quynhon

Nên ta có: $(3m-2)^2+4=20 \Leftrightarrow 9m^2-12m-12=0 \Leftrightarrow m=2, m=-\frac{2}{3}$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:

$x^3-2x^2-(3m-1)x+m+3=(1-m)x+m-5 \Leftrightarrow 2m=x^2-2x+\frac{8}{x}=f(x)$ (*)

Xét hàm số $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=2x-2-\frac{8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $2m>f(1)=7 \Leftrightarrow m>\frac{7}{2}$.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng $y=-1$:

$x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0 \Leftrightarrow x^2=1$ hoặc $x^2=3m+1$.

(C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}3m+1>0\\3m+1\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-\frac{1}{3}\\m\neq 0\end{cases}$

Khi đó $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2x_3x_4=9m+5$

Nên $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2x_3x_4=4 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{9}$.

Bài 5: Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) với Ox.

$x^3-(2m+3)x^2+(2m^2-m+9)x-2m^2+3m-7=0 \Leftrightarrow x=1,$

$x^2-2(m+1)x+2m^2-3m+7=0$ (1)

(Cm) cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ lớn hơn 1

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1<x_1<x_2$.

(1) $\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-2m^2+3m-7>0 \Leftrightarrow -m^2+5m-6>0 \Leftrightarrow 2<m<3$ (a)

$\begin{cases}1<x_1\\1<x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-1>0\\x_2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2>2\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2>2\\x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(m+1)>2\\2m^2-3m+7-2(m+1)+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\2m^2-5m+6>0\end{cases} \Leftrightarrow m>0$ (b)

Từ (a) và (b) ta có:

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1<x_1<x_2 \Leftrightarrow 2<m<3$.

$BC^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4(m+1)^2-4(2m^2-3m+7)$

$=-4m^2+20m-24=1-4\left(m-\frac{5}{2}\right)^2\leq 1 \Rightarrow BC\leq 1 \Rightarrow BC=1 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}\in(2;3)$.

Bài 6:

1. (C_m) cắt trục Ox: $x^3-3mx^2-3x+3m+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2-(3m-1)x-3m-2\right]=0 \Leftrightarrow x=1, x^2-(3m-1)x-3m-2=0$ (2)

(C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 giả sử $x_3=1$ thì x_1, x_2 là nghiệm khác 1 của phương trình (2).

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1+x_2=3m-1, x_1x_2=-3m-2$

Theo bài toán ta có: $\begin{cases}\Delta_{(2)}>0\\1^2-(3m-1).1-3m-2\neq 0\\x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9m^2+6m+9>0\\m\neq 0\\9m^2-5\geq 0\end{cases}$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số và trục hoành:

$-x^4+4mx^2-4m=0$ (1). Đặt $t=x^2$, $(t\geq 0)$ khi đó phương trình (1) trở thành

$-t^2+4mt-4m=0$, $t\geq 0$ (2).

Để đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt M, N, P, Q khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4m^2-4m>0\\P=4m>0\\S=4m>0\end{cases}$ hay $m>1$.

Với $m>1$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1=2m-2\sqrt{m^2-m}$ hoặc $t_2=2m+2\sqrt{m^2-m}$, giả sử $t_1<t_2$.

$MQ=2NP \Leftrightarrow OQ^2=4OP^2$ tức là $t_2=4t_1 \Leftrightarrow 5\sqrt{m^2-m}=3m$, bình phương 2 vế và rút gọn ta được phương trình $16m^2-25m=0$, phương trình này có $m=\frac{25}{16}$ thỏa điều kiện $m>1$.

Bài 7:

1 Tìm m để (Cm) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt trong đó có ba điểm có hoành độ nhỏ hơn 1 và một điểm có hoành độ lớn hơn 2.

Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và trục hoành

$x^4-(3m-1)x^2+2m^2+2m-12=0$ (1) Đặt $t=x^2, t\geq 0$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-(3m-1)t+2m^2+2m-12=0$ (2)

(Cm) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

Vì phương trình (2) luôn có hai nghiệm là $t_1=m+3$ và $t_2=(2m-4)$, do đó

Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}m+3\neq 2m-4\\m+3>0\\2m-4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 7\\m>-3\\m>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>2\\m\neq 7\end{cases}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Khi đó 4 nghiệm của (1) là $\pm\sqrt{m+3}$, $\pm\sqrt{2m-4}$.

* Nếu $m+3 > 2m-4 \Leftrightarrow 2 < m < 7$ thì ta có $-\sqrt{m+3} < -\sqrt{2m-4} < \sqrt{2m-4} < \sqrt{m+3}$

Trong các nghiệm này có ba nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 2, điều này tương đương với $\begin{cases}\sqrt{2m-4} < 1\\ \sqrt{m+3} > 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m-4 < 1\\ m+3 > 4\end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{2}$.

Giao với điều kiện $2 < m < 7$, ta được $2 < m < \frac{5}{2}$.

* Nếu $2m-4 > m+3 \Leftrightarrow m > 7$ thì ta có $-\sqrt{2m-4} < -\sqrt{m+3} < \sqrt{m+3} < \sqrt{2m-4}$.

Ba nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 2

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2m-4} > 2\\ \sqrt{m+3} < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m-4 > 4\\ m+3 < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m > 4\\ m < -2\end{cases} \Leftrightarrow$ không có giá trị m.

2. Tìm m để (Cm) và trục Ox chỉ có hai điểm chung B,C sao cho tam giác ABC đều với A(0;2).

(Cm) và Ox có hai điểm chung $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có đúng hai nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu hoặc (2) có đúng một nghiệm dương.

* (2) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m+3)(2m-4) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 2$

* (2) có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow m+3 = 2m-4 > 0 \Leftrightarrow m = 7$.

Vậy (Cm) và Ox có hai điểm chung $\Leftrightarrow -3 < m < 2 \vee m = 7$.

Với điều kiện $-3 < m < 2$ thì $m+3 > 0$ và $2m-4 < 0$ thì $B(-\sqrt{m+3};0)$, $C(\sqrt{m+3};0)$.

Rõ ràng tam giác ABC cân tại A và O là trung điểm của BC, do đó

Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow AO = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{3}\sqrt{m+3}$.

$\Leftrightarrow 4 = 3(m+3) \Leftrightarrow m = \frac{-5}{3}$ thỏa điều kiện $-3 < m < 2$

Khi $m = 7$ thì $B(-\sqrt{10};0)$, $C(\sqrt{10};0)$, suy ra $BC = 2\sqrt{10}$.

Vì $AO \neq \frac{BC\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ABC không đều do đó $m = 7$ bị loại.

Bài toán 03: ĐỒ THỊ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT CÓ HOÀNH ĐỘ LẬP CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

Bài 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ (*)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (*) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t) = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt

Gọi $t_1 < t_2$ là 2 nghiệm của $f(t) = 0$, khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là: $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$

x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

$\Leftrightarrow m + 1 + |m| = 9(m + 1 - |m|) \Leftrightarrow 5|m| = 4(m+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5m = 4m+4\\ -5m = 4m+4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 4\\ m = -\frac{4}{9}\end{array}\right.$

Bài 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox:

$x^4 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 1 = 2(1) \Rightarrow t^2 - (3m+2)t + 2m^2 - 5m - 3 = 0(2)$ $(t = x^2 \geq 0)$

$\Leftrightarrow t = 2m+1 \vee t = m-3$. (C_m) cắt (d) tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}2m+1 > 0\\ m-3 > 0\\ 2m+1 \neq m-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m > -\frac{1}{2}\\ m > 3\\ m \neq -4\end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$

Khi đó $2m+1 > m-3$ do đó 4 nghiệm của (1) xếp theo thứ tự lớn dần là

$-\sqrt{2m+1}, -\sqrt{m-3}, \sqrt{m-3}, \sqrt{2m+1}$.

1. Bốn nghiệm lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow \sqrt{2m+1} - \sqrt{m-3} = \sqrt{m-3} - (-\sqrt{m-3})$

$\Leftrightarrow \sqrt{2m+1} = 3\sqrt{m-3} \Leftrightarrow 2m+1 = 9(m-3) \Leftrightarrow 7m = 28 \Leftrightarrow m = 4$

2. Bốn nghiệm này lớn hơn $-4 \Leftrightarrow -\sqrt{2m+1} > -4 \Leftrightarrow 2m+1 < 16 \Leftrightarrow m < \frac{15}{2}$.

Giao với điều kiện $m > 3$ ta được $3 < m < \frac{15}{2}$.

Bài 3:

1. ***Điều kiện cần***: Giả sử (C_m) cắt Ox tại ba điểm A, B, C suy ra phương trình $x^3 + 3x^2 + (4m-1)x + 2m^2 - 3 = 0$ (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ và khi đó $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(x_3;0) \Rightarrow AB = BC \Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$ (1)

$x^3 + 3x^2 + (4m-1)x + 2m^2 - 3 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - ax^2 + bx - c$

Với $a = x_1 + x_2 + x_3; b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1; c = x_1x_2x_3$

So sánh hệ số của x^2 ta có: $a = -3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$

$\Rightarrow$ (*) có một nghiệm $x = -1 \Rightarrow -1 + 3 - 4m + 1 + 2m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 2$.

Điều kiện đủ:

* $m = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) + 3(x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -1, x = 1$ ba nghiệm này thỏa mãn (1) nên $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+5) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow m = 2$ loại.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox: $x^4-2mx^2+2m+3=0$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$ ta có: $t^2-2mt+2m+3=0$ (1)

(C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-2m-3>0\\ S=2m>0\\ P=2m+3>0\end{cases} \Leftrightarrow m>3\ (*).$$ Gọi $t_1=m-\sqrt{\Delta'}$, $t_2=m+\sqrt{\Delta'}$.

Khi đó $A\left(-\sqrt{t_2};0\right)$, $B\left(-\sqrt{t_1};0\right)$, $C\left(\sqrt{t_1};0\right)$, $D\left(\sqrt{t_2};0\right)$

$$\Rightarrow AB=BC=CD \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=2\sqrt{t_1}\\ 2\sqrt{t_1}=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}$$

3. $x^3+px^2+pqx+q^3=0 \Leftrightarrow x=-q$ hoặc $x^2+(p-q)x+q^2=0$ (*)

Ta có $\Delta=(p-q)^2-4q^2=p^2-2pq-3q^2=(p+q)(p-3q)$

Do $p,q>0$ và $p>3q \Rightarrow \Delta>0$. Nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1x_2=q^2$. Do đó ba nghiệm $x_1,-q,x_2$ lập thành CSN.

4. $t^2-10mt+6m+3=0$ (1)$\left(t=x^2\ge 0\right)$.

(C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow m>\frac{3+\sqrt{89}}{25}$$

Gọi hai nghiệm dương của phương trình (1) $t_1, t_2\ (t_1<t_2)$ khi đó bốn nghiệm của phương trình cho xếp theo thứ tự lớn dần và lập thành CSC là $-\sqrt{t_2},-\sqrt{t_1},\sqrt{t_1},\sqrt{t_2}$

thỏa mãn: $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_1}\right)=-\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$

Áp dụng định lí Vi-et vào phương trình (1), kết hợp với điều kiện $t_2=9t_1$, ta có hệ

$$\begin{cases}t_1+t_2=10m\\ t_1t_2=6m+3\\ t_2=9t_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_2=9t_1\\ 10t_1=10m\\ 9t_1^2=6m+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_2=9t_1\\ t_1=m\\ 9m^2-6m-3=0\end{cases} \Leftrightarrow m=1, m=-\frac{1}{3}\ \text{(loại)}.$$

Dạng 2: TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

Bài toán 01:
HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT

Bài 1. Phương trình hoành độ giao của (C) và (Δ): $x^3-3x^2-(2m-1)x+4m+2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2m-1)=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $f(x)=x^2-x-2m-1=0$ (*)

(Δ) cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) phải có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l}2\ne x_1=x_2\\ x_1=2\ne x_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta=0\\ -\dfrac{b}{2a}\ne 2\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta>0\\ f(2)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8m+5=0\\ \dfrac{1}{2}\ne 2.\end{cases}\\ \begin{cases}8m+5>0\\ -2m+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{5}{8}\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Bài 3. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4+2m^2x^2+1=x+1$

$\Leftrightarrow x\left(x^3+2m^2x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $g(x)=x^3+2m^2x-1=0$ (*)

Ta có: $g'(x)=3x^2+2m^2\ge 0$ (với mọi x và mọi m) $\Rightarrow$ Hàm số g(x) luôn đồng biến với mọi giá trị của m. Mặt khác $g(0)=-1\ne 0$. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất khác 0. Vậy đường thẳng $y=x+1$ luôn cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Bài 4:

1. Ta có $y'=3(x^2+2x-3) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=1, x=-3 \Rightarrow$ hàm số đạt cực trị tại $A(1;m-5)$ và $B(-3;m+27)$ nên đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+m$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT}<0 \Leftrightarrow (m-5)(m+27)<0 \Leftrightarrow -27<m<5$.

2. d đi qua I và có hệ số góc m nên phương trình d là $y=m(x-1)+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d với (C): $x^3-3x^2+4=m(x-1)+2$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=m(x-1)$ (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2)=m(x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2-m)=0 \Leftrightarrow x=1$, $g(x)=x^2-2x-2-m=0$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, M, N $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_g>0\\ g(1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+3>0\\ -3-m\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow m>-3$.

Hoành độ của M, N là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x)=0$, lại có $x_1+x_2=2=2x_I$ nên I là trung điểm của đoạn MN. Suy ra tam giác AMN vuông cân tại A $\Leftrightarrow AI\perp(d)$ và $AI=\frac{1}{2}MN$

Hệ số góc của đường thẳng AI là $k=\dfrac{y_A-y_I}{x_A-x_I}=-3$.

$AI\perp(d) \Leftrightarrow m(-3)=-1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$. Khi $m=\frac{1}{3}$ thì phương trình $(d): y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Phương trình $g(x)=0$ trở thành phương trình: $x^2-2x-\frac{7}{3}=0$ (2).

$MN^2=\frac{10}{9}(x_2-x_1)^2=\frac{10}{9}\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$ (do M,N thuộc (d)).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (2), $x_1+x_2=2$, $x_1.x_2=-\frac{7}{3}$, suy ra

$$MN^2=\frac{10}{9}\left(4+\frac{28}{3}\right)=\frac{400}{27}\Rightarrow MN=\frac{20}{3\sqrt{3}}, AI=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2}=\sqrt{10}$$

Vì $AI\neq\frac{1}{2}MN$ do đó tam giác AMN không vuông tại A.

Vậy $m=\frac{1}{3}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán, suy ra bài toán vô nghiệm.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (P):

$$x^3-3mx^2+3m(m-2)x-m^3+3m^2+m=-3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^3-3mx^2+3m^2x-m^3+3x^2-6mx+3m^2+m=0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^3+3(x-m)^2+m=0,\ f(x)=(x-m)^3+3(x-m)^2+m$$

(C_m) cắt (P) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị của f(x) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số f(x) có hai điểm cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu.

$f'(x)=3(x-m)^2+6(x-m)=3(x-m)(x-m+2)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=m$ hoặc $x=m-2$

Hai giá trị cực trị là $f(m)=m$ và $f(m-2)=m+4$.

Hai giá trị này trái dấu $\Leftrightarrow m(m+4)<0\Leftrightarrow -4<m<0$.

4. Phương trình hoành độ giao điểm (C) và (H_m) là:

$$x^3+3x^2=\frac{(m+1)x+m-35}{x+1}\Leftrightarrow x^3+3x^2+\frac{36}{x+1}=m+1\quad (*)$$

(C) và (H_m) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 khi đó $f(x)=m+1$ có 2 giao điểm.

Xét hàm số: $f(x)=x^3+3x^2+\frac{36}{x+1}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ta có: $f'(x)=3(x^2+2x)-\frac{36}{(x+1)^2}=3.\frac{(x+1)^4-(x+1)^2-12}{(x+1)^2}$

Bài toán 02: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA HOÀNH ĐỘ CHO TRƯỚC

Bài 1. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đường thẳng $y=2$

$$x^3-(m^2+m-3)x+m^2-3m+2=2\Leftrightarrow x^3-(m^2+m-3)x+m^2-3m=0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x^2+mx-m+3)=0\Leftrightarrow x=m \text{ hoặc } x^2+mx-m+3=0\ (2)$$

Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y=2$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) c[ó] hai nghiệm phân biệt khác m $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m^2-m+3\neq 0\\ \Delta=m^2-4(-m+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-6\end{array}\right.$

Giả sử $x_1=m$ và x_2,x_3 là 2 nghiệm của (2). Khi đó theo định lí Viet ta đượ[c] $x_2+x_3=-m, x_2.x_3=-m+3$.

Với $x_1^2+x_2^2+x_3^2=18\Leftrightarrow m^2+(x_2+x_3)^2-2x_2x_3=18\Leftrightarrow m^2+m^2-2(-m+3)=18$

$\Leftrightarrow m^2+m-12=0\Leftrightarrow m=-4$ hoặc $m=3\to m=3$. Loại $m=-4$

Bài toán 03: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚ[C]

Bài tập.

1. $I(1;2)$, $A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2;-x_2+m)$, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;-x_2+x_1)$.

Đk để có 2 điểm A, B là $\left[\begin{array}{l}m>5\\ m<1\end{array}\right.$

$x_1+x_2=m-1$, $x_1x_2=m-1$.

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow H\left(\frac{m-1}{2};\frac{m+1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{m-3}{2};\frac{m-3}{2}\right)$

Tam giác IAB đều $\Leftrightarrow\begin{cases}IA=IB\\ IH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IH^2=\frac{3}{4}AB^2\end{cases}\Rightarrow m=3\pm\sqrt{6}$

2. d' đi qua điểm $I(1;2)$, có hệ số góc là k: $y=k(x-1)+2$

Tọa độ giao điểm của d' và (C) là nghiệm phương trình:

$$\frac{2x-1}{x-1}=k(x-1)+2\Leftrightarrow kx^2-2kx+k-1=0, x\neq 1\quad (*)$$

Để d' cắt (C) tại 2 điểm phân biệt C,D khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm phân biệt khác 1 tức $\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta'=(k)^2-k(k-1)>0\Leftrightarrow k>0\\ k.1^2-2k.1+k-1\neq 0\end{cases}$

Với $k>0$ thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_3,x_4 là hoành độ của C, D, thỏa mãn:

$$x_3+x_4=2,\ x_3.x_4=\frac{k-1}{k}$$

Kết hợp điều kiện: $\overrightarrow{CD}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CI}$ tìm được k suy ra đường thẳng d'

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài toán 04: ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2 ĐIỂM THUỘC 1 HOẶC 2 NHÁNH CỦA ĐỒ THỊ

Bài 1. $(d_m): y = mx + 2(m+1)$, $(d_m)\cap(C): g(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0, x \neq -1 (*)$

1. Để $(d_m)\cap(C)$ tại hai điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 12 \end{array}\right.$

2. Để $(d_m)\cap(C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$.

Cách 1: Đặt $x = t - 1$ khi đó phương trình $(*)$ trở thành tìm m để phương trình

$mt^2 + mt + 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \frac{3}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Cách 2: $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1) < 0$

Bài 2:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C)

$\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow 4x = (x+2m)(x-1)$ (với $x \neq 1$) $\Leftrightarrow x^2 + (2m-5)x - 2m = 0$ (1)

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-5)^2 + 8m > 0 \\ 1 + (2m-5) - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 12m + 25 > 0 \\ -4 \neq 0 \end{cases}$ đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) $\Rightarrow A(x_1; \frac{1}{2}x_1 + m)$, $B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2 + m\right)$

$\Rightarrow$ trung điểm I của AB có tọa độ: $\begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_I = \frac{1}{4}(x_1 + x_2) + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5-2m}{2} \\ y_I = \frac{5+2m}{4} \end{cases}$

Nên $I \in d: 2x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{5-2m}{2}\right) + \frac{5+2m}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

2. Đường thẳng d có phương trình: $y = kx$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x^3 - 3x^2 + 6x = kx \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 6 - k) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 - 3x + 6 - k = 0$ (*)

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 $\Leftrightarrow 4\begin{cases} \Delta = 4k - 15 > 0 \\ 4 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{15}{4} \\ k \neq 4 \end{cases}$.

Khi đó $A(x_1; kx_1)$, $B(x_2; kx_2)$ $\Rightarrow AB^2 = (1+k^2)(x_1 - x_2)^2 = (1+k^2)(4k - 15)$

Nên $AB = \sqrt{17} \Leftrightarrow (1+k^2)(4k-15) = 17 \Leftrightarrow 4k^3 - 15k^2 + 4k - 32 = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{2x^2 - x + 1}{x-1} = x + 2m$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = (x+2m)(x-1)$ (với $x \neq 1$) $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 + 2m = 0$ (1)

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m - 1 > 0 \\ 1 - 2m + 1 + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 + \sqrt{2} \\ m < 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$ (*).

Khi đó $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 2 > 0$

Suy ra, hai giao điểm nằm về một nhánh của đồ thị (C).

Bài toán 05: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT CÓ ĐỘ DÀI CHO TRƯỚC

Bài 1.

1. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-2}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 2 = 0$ $(x \neq -1)$ $(*)$.

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -1 $\Leftrightarrow m^2 - 8m - 16 > 0$ $(**)$. Khi đó ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{m}{2}, x_1x_2 = \frac{m+2}{2}$

$AB^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 17 = 0 \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{33}$ hoặc $m = 4 - \sqrt{33}$ thỏa điều kiện $(**)$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-1}{x+m} = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + (m+1)x + 2m + 1 = 0$ $(x \neq -m)$ $(*)$. (d) cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-m$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \vee m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m \neq -1 \end{cases}$ $(**)$.

Khi đó ta có: $x_1 + x_2 = -(m+1), x_1.x_2 = 2m + 1$. Gọi $A(x_1; x_1 + 2)$, $B(x_2; x_2 + 2)$

$AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 2(m^2 - 6m - 3)$

Theo giả thiết ta được $2(m^2 - 6m - 3) = 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 7$.

Bài 2: Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $\frac{x+2}{2x-2} = x + m$

Gọi $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (C).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1+x_2=-\frac{2m-3}{2}$, $x_1.x_2=-(m+1)$. Mặt khác $\Delta>0$ $\forall m\in\mathbb{R}$

Ta có: $OA^2+OB^2=x_1^2+(x_1+m)^2+x_2^2+(x_2+m)^2=\frac{1}{2}(4m^2+2m+17)$

$OA^2+OB^2=\frac{37}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(4m^2+2m+17)=\frac{37}{2}\Leftrightarrow 2m^2+m-10=0\Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$, $m=2$.

Bài toán 06: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT CÓ ĐỘ DÀI NHỎ NHẤT

Bài 1:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và đường thẳng d là:

$\frac{x+3}{x+1}=2x+m$ $(x\neq-1)\Leftrightarrow x+3=(x+1)(2x+m)$ ($x=-1$ không thỏa mãn phương trình) $\Leftrightarrow g(x)=2x^2+(m+1)x+m-3=0$ (1)

Ta có $\Delta=(m+1)^2-8(m-3)=m^2-6m+25=(m-3)^2+16>0$ $\forall m\in\mathbb{R}$

Với $\forall m\in\mathbb{R}$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Ta có $M(x_1;2x_1+m)$ $N(x_2;2x_2+m)$ (vì M,N nằm trên d: $y=2x+m$)

$$MN^2=5\left[\frac{(m+1)^2}{4}-\frac{4(m-3)}{2}\right]=\frac{5}{4}(m^2-6m+25)=\frac{5}{4}\left[(m-3)^2+16\right]\geq 20$$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{2x+1}{x+2}=-x+m\Leftrightarrow x^2+(4-m)x+1-2m=0\ (*).$$

Vì (*) có $\Delta=m^2+12>0$ và $x=-2$ không là nghiệm của (*) nên (C) và d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Khi đó: $A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2;-x_2+m)\Rightarrow AB^2=2(x_1-x_2)^2=2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2$.

Áp dụng định lí Viét $\Rightarrow AB^2=2(m^2+12)\geq 24\Rightarrow AB\geq 2\sqrt{6}$

Bài 2:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).

$\frac{2x^2+3x+3}{x+1}=4x+m\Leftrightarrow 2x^2+3x+3=(4x+m)(x+1)$(*) (do x = - 1 không thỏa mãn phương trình (*)) $\Leftrightarrow 2x^2+(m+1)x+m-3=0$ (1) $\Delta>0$ $\forall m\in\mathbb{R}$

$$AB^2=\frac{17}{4}[(m-3)^2+16]\Rightarrow AB^2\geq\frac{17}{4}.16=68\Rightarrow AB\geq 2\sqrt{17}$$

2. $S_{IAB}=7$. Viết lại phương trình (d) thành dạng $4x-y+m=0$, khoảng cách từ I đến d là

$$d(I,d)=\frac{|4+m|}{\sqrt{17}}.$$

Diện tích tam giác IAB: $S_{IAB}=\frac{1}{2}AB.d(I,d)=7\Leftrightarrow\frac{1}{4}.\frac{17}{4}(m^2-6m+25).\frac{(m+4)^2}{17}=49$.

$$\Leftrightarrow(m-3)(m^3+5m^2+8m+128)=0\Leftrightarrow m=3$$

Chú ý. *Nếu phương trình hoành độ giao điểm là phương trình đa thức bậc ba khôn có nghiệm nguyên hay nghiệm hữu tỷ thì có thể sử dụng một trong hai phương phá dưới đây để giải quyết bài toán.*

Cách 1. Chuyển phương trình thành dạng f(x) = g(m) (g(m) là biểu thức của m). Lập bảng biến thiên của f(x), dựa vào bảng biến thiên này để tìm kết quả của bài toán.

Cách 2. Từ các dạng đồ thị của hàm số bậc ba,ta có tính chất sau:" Đồ thị hàm số bậc ba c trục Ox tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi hàm số có hai điểm cực trị và hai giá trị cực t trái dấu"

Bài toán 07: HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CẮT NHAU TẠI 2, 3, 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT THỎA MÃN TÍNH CHẤT HÌNH HỌ

Bài 1:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: x^2+(m-3)x+1-m=0, x\neq 1$ (*

Ta thấy, $\Delta=m^2-2m+5>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$ và $x=1$ không phải là nghiệm của (*), suy phương trình (*) có nghiệm $\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó ta có: $x_A+x_B=3-m, x_A.x_B=1-m$

ΔOAB vuông tại O thì $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_Ax_B+(x_A+m)(x_B+m)=0$

$$\Leftrightarrow 2x_Ax_B+m(x_A+x_B)+m^2=0\Leftrightarrow m=-2$$

2. Ta có: $d_k: y=kx+k\Leftrightarrow kx-y+k=0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d_k là: $x=-1$ hoặc $(x-2)^2=k$

d_k cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0<k\neq 9$

Khi đó các giao điểm là $A(-1;0), B(2-\sqrt{k};3k-k\sqrt{k}), C(2+\sqrt{k};3k+k\sqrt{k})$.

$BC=2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}$, $d(O,BC)=d(O,d_k)=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}.\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2}=1\Leftrightarrow k\sqrt{k}=1\Leftrightarrow k^3=1\Leftrightarrow k=1$$

3. Ta có: $E(1;0)$ đường thẳng Δ qua E có dạng $y=k(x-1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $\Delta: (x-1)(x^2-2x-2-k)=0$

Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow k>-3$

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}d(O,\Delta).AB=|k|\sqrt{k+3}\Rightarrow|k|\sqrt{k+3}=2\Rightarrow k=1$, bạn đọc tìm giá trị k khác

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

4. Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và (d).

$-x^3+mx+1=2x+1 \Leftrightarrow x^3-(m-2)x=0$ (1) $\Leftrightarrow x=0, x^2=m-2$ (2)

(Cm) cắt (d) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$.

Khi đó $B(-\sqrt{m-2};-2\sqrt{m-2}+1)$, $C(\sqrt{m-2};2\sqrt{2-m}+1)$

$BC^2=4(m-2)+16(m-2)=20(m-2)$

$OB^2+OC^2=2(m-2)+2+8(m-2)=10(m-2)+2$

Tam giác OBC vuông tại O $\Leftrightarrow OB^2+OC^2=BC^2$

$\Leftrightarrow 10(m-2)+2=20(m-2) \Leftrightarrow m=\frac{11}{5}$ (thỏa mãn điều kiện $m>2$).

5. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d_m:

$\frac{1+x}{1-2x}=x+2m \Leftrightarrow g(x)=2x^2+4mx+1-2m=0,\ x\neq\frac{1}{2}$ (1)

Đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $\frac{1}{2}$ tức

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0 \\ \Delta'=4m^2+4m-2>0 \end{cases} \text{ hay } m<\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } m>\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \ (2).$$

Khi đó $AB^2=(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1.x_2\right]$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=-2m, x_1.x_2=\frac{1-2m}{2}$.

$$AB^2=2\left[(-2m)^2-4\left(\frac{1-2m}{2}\right)\right] \Rightarrow AB=\sqrt{2(4m^2+4m-2)}.$$

$$S=\frac{1}{2}AB.IH \text{ với } IH=d(I;d_m),\ d(I;d_m)=\frac{|x_I-y_I+2m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+1|}{\sqrt{2}}.$$

Giả thiết $S=1$ hay $\frac{1}{2}\sqrt{2(4m^2+4m-2)}.\frac{|2m+1|}{\sqrt{2}}=1$, bình phương hai vế và rút gọn ta được $(2m+1)^4-3(2m+1)^2-4=0$ (3), đặt $t=(2m+1)^2$ và $t\geq 0$, phương trình (3) trở thành $t^2-3t-4=0$, phương trình này có hai nghiệm $t=-1$ (không thỏa mãn $t\geq 0$) hoặc $t=4$.

Với $t=4$ tức $(2m+1)^2=4$ tương đương với $m=-\frac{3}{2}$ hoặc $m=\frac{1}{2}$

6. Giả sử $A(x_A;y_A=2x_A-2m)$, $B(x_B;y_B=2x_B-2m)$ là tọa độ thỏa mãn để bài và

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=...=\sqrt{5m^2+10},\ d(O;d)=\frac{|-2m|}{\sqrt{5}} \text{ (Đk: } m\neq 0)$$

Mặt khác $M(m;0)$, $N(0;-2m)$ là giao điểm của d với Ox, Oy.

Theo bài toán, $S_{OAB}=3S_{OMN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{|-2m|}{\sqrt{5}}.\sqrt{5m^2+10}=3\frac{1}{2}|m|.|2m|$

7. $B(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m})$, $C(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}) \Rightarrow BC=2\sqrt{m(1+m^2)}$ (Đk: $0<m\neq 9$

$d(O;d)=\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}$. Theo bài toán, suy ra $m=1$

8. Đường thẳng d_1 qua A có hệ số góc $\frac{3}{2}$ có phương trình: $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ và giao điển d_1 với Ox là $C(-1;0)$.

Đường thẳng d_2 qua B có hệ số góc $\frac{3}{2}$ có phương trình: $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$ và giao điểm d_2 với Ox là $D\left(\frac{7}{3};0\right)$.

Khoảng cách h giữa d_1, d_2 là đường cao hình thang và $h=\frac{10}{\sqrt{13}}$

Diện tích hình thang phải tìm là $S=\frac{AC+BD}{2}.h=\frac{\sqrt{13}+\frac{\sqrt{13}}{3}}{2}.\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{20}{3}$

Bài 2:

1. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m \Leftrightarrow 3x^2-(1+m)x+m+1=0$

(1), $(x\neq 1)$, d cắt (C) tại A và B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>11 \\ m<-1 \end{array}\right.$ (*)

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1). Khi đó $A(x_1;-3x_1+m), B(x_2;-3x_2+m)$

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow x_I=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+m}{6}$, $y_I=-3x_I+m=\frac{m-1}{2}$

Gọi G là trọng tâm tam giác OAB $\Rightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow G\left(\frac{1+m}{9};\frac{m-1}{3}\right)$

$$G\in d \Leftrightarrow \frac{1+m}{9}-2.\left(\frac{m-1}{3}\right)-2=0 \Leftrightarrow m=-\frac{11}{5} \text{ (thoả (*)).}$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$\frac{2x+1}{x-1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ f(x)=x^2+(m-3)x-m-1=0 \end{cases}$$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N $\Leftrightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_M, x_N khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-2m+13>0 \\ f(1)=-3\neq 0 \end{cases}$$ (đúng với mọi m).

Tọa độ các giao điểm là $M(x_M;y_M), N(x_N;y_N)$.

$MN=\sqrt{2[(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N]}=\sqrt{2(m^2-2m+13)}$; $d=d(I,d)=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$

$S_{IMN}=4\Leftrightarrow \frac{1}{2}MN.d=4\Leftrightarrow |m-1|.\sqrt{m^2-2m+13}=8 \Leftrightarrow m=3; m=-1$.

3. Đồ thị là (C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình:

$\frac{x-3}{x-2}=mx+1\Leftrightarrow mx^2-2mx+1=0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $x\neq 2$ hay

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=m^2-m>0 \\ g(2)\neq 0 \end{cases} (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$$

a. $AB=\sqrt{10}\Leftrightarrow (m^2+1)\left[(x_2+x_1)^2-4x_2.x_1\right]=10 (b)$

Áp dụng định lý vi ét phương trình (*), ta có $x_2+x_1=2, x_2.x_1=\frac{1}{m}$

Khi đó: $(b)\Leftrightarrow (m^2+1)\left(4-\frac{4}{m}\right)=10\Leftrightarrow (m^2+1)(4m-4)=10m$

$\Leftrightarrow (m-2)(2m^2+2m+1)=0 (c)$. $2m^2+2m+1=2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$

b. $G\left(\frac{2}{3};4\right)$ là trọng tâm tam giác OAB $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{2}{3} \\ \frac{mx_1+1+mx_2+1+0}{3}=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ m(x_1+x_2)=10 \end{cases} \Rightarrow m=5$ thỏa điều kiện (1).

4. Phương trình hoành độ điểm chung của (C_m) và (d) là:

$x(x^2+2mx+m+2)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y(0)=4, g(x)=x^2+2mx+m+2=0$

(C_m) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4), B, C$

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m-2>0 \\ g(0)=m+2\neq 0 \end{cases} (*).$$

$S_{\Delta KBC}=\frac{1}{2}BC.d(K,d)$, trong đó $d(K,d)=\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$S_{\Delta KBC}=4\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.d(K,d)=4\Leftrightarrow BC=4\sqrt{2}\Leftrightarrow BC^2=32$

$\Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_Bx_C=16\Leftrightarrow 4m^2-4(m+2)=16\Leftrightarrow m^2-m-6=0$

5. Thay vì tìm các điểm P, Q ta sẽ tìm một đường thẳng $y=a$ song song với trục hoành và cách điểm cực đại $(0;1)$ của đồ thị một khoảng bằng 8. Dễ thấy rằng a chỉ có thể nhận hai giá trị là $a=-7$ hoặc $a=9$.

Tuy nhiên, $y=a$ phải cắt (C) tại ít nhất hai điểm nên $a>1$, tức $a=9$.

Giao điểm của $y=(x^2-1)^2$ và $y=9$ có hoành độ thỏa mãn phương trình

$(x^2-1)^2=9\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=2$.

Vậy, $P(-2;9)$, $Q(2;9)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

Bài 3:

1. $I(1;2)$ là tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận. Đường thẳng (IA): $y=-x+3$ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận, cũng là trục đối xứng của đồ thị (C). Do đó đường thẳng $(d)\perp IA\Rightarrow (d)$: $y=x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$\frac{2x+1}{x-1}=x+m\Leftrightarrow g(x)=x^2+(m-3)x-m-1=0$ (*)

Dễ thấy $\begin{cases} \Delta=(m-1)^2+12>0 \ \forall m\in\mathbb{R} \\ g(1)=-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Do đó (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $B(x_1;x_1+m)$ và $C(x_2;x_2+m)$.

Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow M\left(\frac{3-m}{2};\frac{3+m}{2}\right)$.

Do B và C đối xứng qua đường thẳng IA nên tam giác ABC cân tại A. Do đó ABC đều khi và chỉ khi $AB=BC\Rightarrow BC^2=(2MB)^2=4(BC^2-AM^2)$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow BC^2 = \frac{4}{3}AM^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = \left[\left(\frac{3-m}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{3+m}{2}-5\right)^2\right].\frac{4}{3}$

$2(m^2 - 2m + 13) = 2\left(\frac{m-7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3(m^2 + 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

2. Giả sử $A(-1;-1)$, $B(2;2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x + m$ là:

$\frac{3x+2}{x+2} = x + m \Leftrightarrow g(x) = x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 0$.

Đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm $C(x_1; x_1 + m)$, $D(x_2; x_2 + m)$ phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 và đều khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_g > 0 \\ g(-2) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)(m-9) > 0 \\ 4 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 9\end{array}\right.$.

ABCD là hình bình hành khi $\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 3$ (1)

Theo định lí vi – ét ta có: $\begin{cases}x_1 + x_2 = -(m-1) \\ x_1.x_2 = 2m - 2\end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $m = 0$, $m = 10$.

Khi $m = 0$ thì ABCD không là hình bình hành.

Khi $m = 10$ thì ABCD là hình bình hành. Do đó $m = 10$ thỏa bài toán.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị của hàm số:

$\frac{-x+m}{x+2} = \frac{1}{2} - x \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2m - 2 = 0$ (1), $x \neq -2$

d cắt (Cm) tại 2 điểm A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $-2 \Leftrightarrow -2 \neq m < \frac{17}{16}$ (*)

Khi đó các giao điểm là: $A\left(x_1; \frac{1}{2} - x_1\right)$, $B\left(x_2; \frac{1}{2} - x_2\right)$. $AB = \sqrt{2(17-16m)}$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d(O,d) = \frac{1}{2}\sqrt{2(17-16m)}.\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{17-16m} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{16}$ (thỏa(*)).

4. Đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khi $mx - m = \frac{x^2 - 2x - 1}{x-1}$ có 2 nghiệm phân biệt, tức là: $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 khi đó $m < 1$. Với $m < 1$ thì giao điểm của d và (C) là $A(x_1; mx_1 - m)$, $B(x_2; mx_2 - m)$.

Tam giác ABC vuông tại C $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$ tức $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1\end{array}\right.$.

Bài 4: Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và PQ:

$\frac{mx+2}{x-1} = -x + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3 = 0$, $x \neq 1$ (1).

PQ cắt (C_m) tại 2 điểm phân biệt P, Q khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, tức là $\begin{cases}\Delta > 0 \\ m + 2 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2$

Với $m \neq -2$, phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2.

Gọi tọa độ $P(x_1; x_1 + 1)$, $Q(x_2; x_2 + 1)$ $\Rightarrow PQ = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$

Diện tích tứ giác APBQ bằng 24 $\Leftrightarrow d(A;PQ).PQ = 24$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{2}\sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = 24$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$ (2). Theo định lý Vi – et, ta có: $x_1 + x_2 = m$, $x_1.x_2 = -3$

Thay vào (2) ta được $m^2 + 12 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = 2$

Bài 5. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).

$\frac{x^2 - x - 2}{x+2} = \frac{3}{2}x + m \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq -2 \\ 2x^2 - 2x - 4 = (x+2)(3x+2m)\end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+4)x + 4m + 4 = 0$ (1) (do $x = -2$ không là nghiệm phương trình (1))

1. (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 8m + 16 - 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 = (m+2)^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$,

$MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left[\left(\frac{3}{2}x_2 + m\right) - \frac{3}{2}(x_1 + m)\right]^2 = \frac{13}{4}(x_2 - x_1)^2$

$= \frac{13}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = \frac{13}{4}[4(m+4)^2 - 4(4m+4)] = 13(m^2 + 4m + 12)$

$MN = 2\sqrt{39} \Leftrightarrow MN^2 = 156 \Leftrightarrow 13(m^2 + 4m + 12) = 156$

2. Ta có: $AM^2 = (x_1 + 4)^2 + \left(\frac{3}{2}x_1 + m\right)^2$, $AN^2 = (x_2 + 4)^2 + \left(\frac{3}{2}x_2 + m\right)^2$

$AM^2 + AN^2 = \frac{13}{4}(x_1^2 + x_2^2) + 8(x_1 + x_2) + 32 + 2m^2 + 3m(x_1 + x_2) = 9m^2 + 12m + 124$

Tam giác AMN vuông tại A $\Leftrightarrow AM^2 + AN^2 = MN^2$.

$\Leftrightarrow 9m^2 + 12m + 124 = 13(m^2 + 4m + 12) \Leftrightarrow m^2 + 10m + 8 \Leftrightarrow m = -5 + \sqrt{17}$.

Bài 6.

1. Đường thẳng (d) qua O có dạng: $y = kx$, $y = mx$ (k,m đều khác 0 và $k \neq m$).

Gọi A,B là giao điểm của (d) và (C) thì tọa độ A,B là nghiệm của hệ:

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$$\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{2}{k} \\ y=kx \end{cases}.$$

Để A,B tồn tại thì $k>0$, khi đó $A\left(-\sqrt{\frac{2}{k}};-\sqrt{2k}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{2}{k}};\sqrt{2k}\right)$.

Tương tự $m>0$, ta có: $M\left(-\sqrt{\frac{2}{m}};-\sqrt{2m}\right)$, $N\left(\sqrt{\frac{2}{m}};\sqrt{2m}\right)$.

Vì O là tâm đối xứng của (C) nên ABMN là hình bình hành. Do đó ABMN là hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{32}{3}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} OA=OM \\ AM.AN=\frac{32}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mk=1 \\ k+m=\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ m=3 \end{cases}$$

Vậy, (d) có phương trình: $y=\frac{1}{3}x, y=3x$.

2. I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C),suy ra I(-1; 2).

Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$. Hệ trục tọa độ Oxy biến thành hệ trục tọa độ IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x=X+x_I=X-1 \\ y=Y+y_I=Y+2 \end{cases}$.

Ta giải bài toán trong trường hợp hệ tọa độ là hệ tọa độ IXY

Đối với hệ tọa độ IXY, hàm số $y=f(x)$ trở thành: $Y=2+\frac{2}{X}-2=\frac{2}{X}$

Hai đường thẳng (D) và (D') qua I có phương trình lần lượt là $Y=kX$, $Y=mX$ (k, m đều khác 0 và $m\neq k$). Gọi A, B là giao điểm của (D) với (C) thì tọa độ A,B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} Y=\frac{2}{X} \\ Y=kX \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y=kX \\ \frac{2}{X}=kX \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2=\frac{2}{k} \\ Y=kX \end{cases}$.

A, B tồn tại $\Leftrightarrow k>0$. Khi đó A $A\left(-\sqrt{\frac{2}{k}},-\sqrt{2k}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{2}{k}};\sqrt{2k}\right)$, suy ra

$IA^2=IB^2=X^2+Y^2=X^2+k^2X^2=(1+k^2)X^2=(1+k^2)\frac{2}{k}$.

Tương tự gọi M,N là giao điểm của (D') với (C) thì M, N tồn tại khi và chỉ khi $m>0$ và $M\left(-\sqrt{\frac{2}{m}};-\sqrt{2m}\right)$, $N\left(\sqrt{\frac{2}{m}};\sqrt{2m}\right)$, suy ra $IM^2=IN^2=(1+m^2)\frac{2}{m}$

Vì I là tâm đối xứng của (C) nên dễ thấy tứ giác AMBN là hình bình hành do đó AMBN là hình chữ nhật $\Leftrightarrow IA^2=IM^2 \Leftrightarrow (1+k^2)\frac{2}{k}=(1+m^2)\frac{2}{m}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{k}+2k=\frac{2}{m}+2m \Leftrightarrow 2(k-m)+\frac{2(m-k)}{mk}=0 \Leftrightarrow (m-k)\left(\frac{1}{mk}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{mk}=1$ (do $m\neq k$) $\Leftrightarrow mk=1$.

Diện tích hình chữ nhật AMBN: $S=4\sqrt{5} \Leftrightarrow AM^2.AN^2=\left(\frac{32}{3}\right)^2=\frac{1024}{9}$

$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{\frac{2}{k}}-\sqrt{\frac{2}{m}}\right)^2+(\sqrt{2k}-\sqrt{2m})^2\right]\left[\left(\sqrt{\frac{2}{k}}+\sqrt{\frac{2}{m}}\right)^2+(\sqrt{2k}+\sqrt{2m})^2\right]=\frac{1024}{9}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2k+2m-4}{mk}+2k+2m-4\sqrt{km}\right)\left(\frac{2k+2m+4}{mk}+2k+2m+4\sqrt{km}\right)=\frac{1024}{9}$

$\Leftrightarrow 16(k+m)^2-64=\frac{1024}{9} \Leftrightarrow (k+m)^2=\frac{100}{9} \Leftrightarrow k+m=\frac{10}{3}$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} mk=1 \\ k+m=\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ m=3 \end{cases}$.

Bài 7.

1. Đặt $t=|x|$, $t\geq 0$. Phương trình (2) trở thành phương trình

$t^3+3t^2-9t+a=0 \Leftrightarrow -\frac{t^3}{3}-t^2+3t+4=\frac{a}{3}+4$ (3). Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y=\frac{a}{3}+4$.

Phương trình (2) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$Phương trình (3) có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow \frac{a}{3}+4<4 \vee \frac{a}{3}+4=\frac{17}{3} \Leftrightarrow a<0 \vee a=5$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng

(d): $-\frac{x^3}{3}-x^2+3x+4=mx+4 \Leftrightarrow x(x^2+3x-9+3m)=0$ (4)

$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2+3x+3m-9=0$ (5).

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$Phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt khác

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=45-12m>0 \\ 3m-9\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{15}{4} \\ m\neq 3 \end{cases}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Ta có $IB^2 + IC^2 \ge 2IB.IC \ge 4.\frac{1}{2}IB.IC.\sin\widehat{BIC} = 4S_{IBC}$.

$IB^2 + IC^2 = 4S_{IBC} \Leftrightarrow \begin{cases} IB = IC \\ \widehat{BIC} = 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta$ BIC vuông cân tại I.

Vì B, C thuộc đường thẳng (d) và hoành độ của chúng là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (5) nên $B(x_1; mx_1 + 4)$, $C(x_2; mx_2 + 4)$.

Gọi K là trung điểm của BC,ta có $K\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}m + 4\right)$ (do $x_K = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3}{2}$ và K thuộc (d)) $\Rightarrow \overrightarrow{KI} = \left(0; \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}m\right)$.

Tam giác IBC cân tại I $\Leftrightarrow KI \perp (d)$ và (d): $y = mx + 4 \Leftrightarrow mx - y + 4 = 0$

Suy ra một vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{a} = (1; -m)$.

$KI \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{KI}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow -m\left(\frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}m\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}m = 0$.

Trường hợp $\frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}m = 0$ bị loại vì khi đó $\overrightarrow{KI} = \vec{0} \Rightarrow I \equiv K \Rightarrow$ B, I, C thẳng hàng.

Mặt khác khi m = 0 thì $\overrightarrow{IB} = \left(x_1 + \frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\overrightarrow{IC} = \left(x_2 + \frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) + \frac{45}{4} = x_1.x_2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4} + \frac{45}{4} = -9 - \frac{9}{2} + \frac{27}{2} = 0$

$\Rightarrow IB \perp IC \Rightarrow$ Tam giác BIC vuông tại I.

Bài 8.

1. $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0^2 - 2x_0 + 2}{x_0 - 1}\right)$. M cách đều hai trục tọa độ $\Leftrightarrow d(M,Ox) = d(M,Oy)$

$$\Leftrightarrow |x_0| = \left|\frac{x_0^2 - 2x_0 + 2}{x_0 - 1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{x_0^2 - 2x_0 + 2}{x_0 - 1} = x_0 & (1) \\ \frac{x_0^2 - 2x_0 + 2}{x_0 - 1} = -x_0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 2 = x_0^2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

$(2) \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 2 = -x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0$ (vn).

Vậy điểm cần tìm là M(2; 2)

2. I là giao điểm của hai đường tiệm cận $\Rightarrow I(1;0)$.

Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$. Hệ trục Oxy $\Rightarrow$ Hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$.

Đối với hệ trục IXY. Ta có I(0;0).

Phương trình (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \Leftrightarrow Y = X + \frac{1}{X} = F(X)$.

Phương trình hai đường thẳng (d) và (d') đi qua I có hệ số góc là số nguyên: Y = kX
Y = k'X với k, k' là các số nguyên. và $k \ne k'$

Gọi A, C là hai giao điểm của (C) và (d) thì tọa độ A, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Y = X + \frac{1}{X} \\ Y = kX \end{cases} (I). \ (I) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = kX \\ kX = X + \frac{1}{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)X^2 = 1 \ (3) \\ Y = kX \end{cases}$$

(d)) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, C $\Leftrightarrow$ Hệ (I) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k - 1 > 0 \Leftrightarrow k > 1$.

Khi đó $A\left(-\frac{1}{\sqrt{k-1}}; -\frac{k}{\sqrt{k-1}}\right)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}; \frac{k}{\sqrt{k-1}}\right)$

Tương tự (d') cắt (C) tại hai nghiệm phân biệt B, D $\Leftrightarrow k' > 1$.

Khi đó $B\left(-\frac{1}{\sqrt{k'-1}}; -\frac{k'}{\sqrt{k'-1}}\right)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{k'-1}}; \frac{k'}{\sqrt{k'-1}}\right)$.

Vì A và C đối xứng với nhau qua I; B và D đối xứng qua I nên tứ giác ABCD là hình bình hành. Do đó ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k-1} + \frac{k^2}{k-1} = \frac{1}{k'-1} + \frac{k'^2}{k'-1} \Leftrightarrow (k'-1)(1 + k^2) = (k-1)(1 + k'^2)$

$\Leftrightarrow k' + k^2k' - k^2 - 1 = k + kk'^2 - k'^2 - 1 \Leftrightarrow k' - k + k'^2 - k^2 + kk'(k - k') = 0$

$\Leftrightarrow (k' - k)(1 + k + k' - kk') = 0 \Leftrightarrow 1 + k + k' - kk' = 0$ (do $k \ne k'$)

$\Leftrightarrow k' = \frac{1 + k}{k - 1} = 1 + \frac{2}{k - 1}$

Với $k \in \mathbb{Z}$ thì

$k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2 \vdots (k - 1) \Leftrightarrow k - 1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$

- $k - 1 = -2 \Leftrightarrow k = -1$ (loại do $k > 1$)
- $k - 1 = -1 \Leftrightarrow k = 0$ (loại)
- $k - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$. Khi đó k' = 3.
- $k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$. Khi đó k' = 2.

Vậy, đối với hệ trục tọa độ IXY, phương trình của hai đường thẳng cần tìm là
Y = 2X, Y = 3X.

Suy ra đối với hệ trục xuất phát Oxy, phương trình của hai đường thẳng này là
y = 2(x – 1), y = 3(x – 1).

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Bài 10: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).

$\frac{2x+1}{x-1} = x+m \Leftrightarrow x^2+(m-3)x-m-1=0$ (1)

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta = (m-3)^2+4m+4>0 \Leftrightarrow m^2-2m+13>0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

1. Ta có $M(x_1;x_1+m)$, $N(x_2;x_2+m)$

M, N cách đều trục Ox $\Leftrightarrow |y_M|=|y_N| \Leftrightarrow |x_1+m|=|x_2+m|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+m=x_2+m \\ x_1+m=-x_2-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ x_1+x_2=-2m \end{array}\right.$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên chỉ xảy ra trường hợp $x_1+x_2=-2m \Leftrightarrow 3-m=-2m \Leftrightarrow m=-3$.

2. $MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2+m-x_1-m)^2}=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}$

$=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1.x_2]}=\sqrt{2[(m-3)^2+4(m+1)]}=\sqrt{2(m^2-2m+13)}$

Viết lại phương trình (d) dưới dạng $x-y+m=0$

Khi đó $d(I,(d))=\frac{|1-2+m|}{\sqrt{2}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$

$S_{IMN}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}MN.d(I,(d))=4 \Leftrightarrow \sqrt{2(m^2-2m+13)}.\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}=8$

$\Leftrightarrow \sqrt{(m-1)^2+12}.|m-1|=8 \Leftrightarrow [(m-1)^2+12](m-1)^2=64$

$\Leftrightarrow (m-1)^4+12(m-1)^2-64=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=4 \Leftrightarrow m-1=\pm 2 \Leftrightarrow m=3 \vee m=-1$

Vậy $m=3 \vee m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài 10:

1. Để hai điểm M, N đối xứng qua O thì trước hết Δ phải đi qua O

Suy ra $2b-4=0 \Leftrightarrow b=2 \Rightarrow \Delta: y=ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ

$\frac{3x+2}{x+2}=ax \Leftrightarrow ax^2+(2a-3)x-2=0$ (*)

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=4a^2-4a+9>0 \Leftrightarrow a\neq 0. \\ 4\neq 0 \end{cases}$

M, N đối xứng qua O $\Leftrightarrow x_1+x_2=0 \Leftrightarrow 2a-3=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y=x$

$\frac{3x+2}{x+2}=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1, x=2$. Suy ra $A(-1;-1), B(2;2)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y=x+m$

$\frac{3x+2}{x+2}=x+m \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+2m-2=0$ (1)

Đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt C, D ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác -2 $\Leftrightarrow (m-1)(m-9)>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(9;+\infty)$

Khi đó: $C(x_1;x_1+m), D(x_2;x_2+m)$

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow x_2-x_1=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=3 \Leftrightarrow \Delta=9 \Leftrightarrow m^2-10m+9=9 \Leftrightarrow m=0, m=10$

Do $m=0$ thì C, D trùng với B, A nên ta loại. Vậy $m=10$ là giá trị cần tìm.

Bài 11:

1. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại tại A, B phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$\frac{x^2-2x+9}{x-2}=2x+m \Leftrightarrow g(x)=x^2+(m-2)x-2m-9=0, \quad x\neq 2$ (*).

Vì $\begin{cases} g(2)\neq 0 \\ \Delta=(m-2)^2+4(2m+9)>0 \end{cases}, \forall m\in\mathbb{R}$

Nên đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại tại A, B với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi $A(x_A;2x_A+m)$, $B(x_B;2x_B+m)$ với $x_A;x_B$ là nghiệm của phương trình $g(x)=0$

Vì $I\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác OAB nên $\begin{cases} \frac{x_A+x_B+0}{3}=2 \\ \frac{2x_A+m+2x_B+m}{3}=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=-4$.

2. $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1). Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$, phương trình (1) trở thàn[h] $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (2).

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (2) có ha[i] nghiệm phân biệt $t>0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(m+1)^2-(2m+1) \\ S=2(m+1)>0 \\ P=2m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0$ và $m>-\frac{1}{2}$.

Với $-\frac{1}{2}<m\neq 0$ thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoàn[h] độ theo thứ tự $-\sqrt{t_1};-\sqrt{t_2};\sqrt{t_2};\sqrt{t_1}$ với $t_1>t_2$.

Theo giả thiết $S_{ACK}=\frac{1}{2}AC.d(K;AC)$ (3) với $d(K;AC)=|y_K|$.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow \sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=4 \Leftrightarrow t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}=16$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình (2), ta được:

$$2(m+1)+2\sqrt{2m+1}=16 \Leftrightarrow \sqrt{2m+1}=7-m \Leftrightarrow \begin{cases} m-7\ge 0 \\ m^2-16m+48=0 \end{cases} \Rightarrow m=4.$$

3. $I(1;2)$ là tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận. Đường thẳng (IA): $y=-x+3$ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận, cũng là trục đối xứng của đồ thị (C). Do đó đường thẳng $(d)\perp IA \Rightarrow (d)$: $y=x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là: $\Delta: y=y'(m)(x-m)+y(m)$

$\Leftrightarrow g(x)=x^2+(m-3)x-m+1=0$ (*)

Dễ thấy $\begin{cases} \Delta=(m-1)^2+12>0\ \forall m\in\mathbb{R} \\ g(1)=3\ne 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Do đó (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $B(x_1;x_1+m)$ và $C(x_2;x_2+m)$

Gọi $M(m;m^4-2m^2-1)$ là trung điểm BC

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x_1+x_2+2m}{2}\right) \text{ hay } M\left(\frac{3-m}{2};\frac{3+m}{2}\right).$$

Do B và C đối xứng qua đường thẳng $N(n;n^4-2n^2-1)$ nên tam giác ABC cân tại A.

Do đó ABC đều khi $AB=BC \Rightarrow BC^2=(2MB)^2=4(BC^2-AM^2)$

$$\Leftrightarrow BC^2=\frac{4}{3}AM^2 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2=\left(\frac{3-m}{2}+2\right)^2+\left(\frac{3+m}{2}-5\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=2\left(\frac{m-7}{2}\right)^2 \text{ hay } 2(m^2-2m+13)=2\left(\frac{m-7}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow m^2+4m-5=0 \Leftrightarrow m=-5, m=1$

4. Do các điểm O và A thuộc đường thẳng $\Delta: y=-x$. Để OABC là hình bình hành thì $BC=OA=5\sqrt{2}$

Hoành độ của B và C là nghiệm của phương trình: $\dfrac{2x-4}{x+1}=-x+m$

$\Leftrightarrow x^2+(3-m)x-m-4=0\ (x\ne -1)$ (1)

Vì $\Delta=m^2-2m+25>0\ \forall m$, nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt B và C với $B(x_1;-x_1+m), C(x_2;-x_2+m)$

Giả sử x_1,x_2 là nghiệm của (1), ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m-3 \\ x_1x_2=-m-4 \end{cases}$ (2)

Khi đó $BC^2=2(x_1-x_2)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$ (3)

Thay (2) vào (3) ta được:

$BC^2=2m^2-4m+50 \Rightarrow 2m^2-4m+50=50 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=2$

Với $m=0$ thì O,A,B,C thẳng hàng nên không thoả mãn.

Vậy, với $m=2$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3: ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ TẠI 2, 3 ĐIỂM MÀ TIẾP TUYẾN TẠI ĐÓ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Bài 1:

1. Đường thẳng $(t): y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{2x+3}{x-2}=2x+m$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $y'(x_1)=y'(x_2)$.

Khi đó phương trình $g(x)=2x^2+(m-6)x-2m-3=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 2 và thỏa mãn điều kiện $-\dfrac{7}{(x_1-2)^2}=-\dfrac{7}{(x_2-2)^2} \Leftrightarrow x_1+x_2=4 \Leftrightarrow m=2$

2. Tiếp tuyến d tại M: $y=2m(m^2-3)x-\dfrac{3m^4}{2}+3m^2+\dfrac{5}{2}$

Hoành độ giao điểm d và (C): $(x-m)(x^2+2mx+3m^2-6)=0$.

Với $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3},\ m\ne\pm 1$ thì d và (C) cắt nhau tại E,F khác M

$MF=3ME \Rightarrow \overrightarrow{MF}=3\overrightarrow{ME} \Rightarrow ... \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$, kiểm tra lại thấy thỏa.

Bài 2:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) và đường thẳng (d)

$x^3+mx^2+1=-x+1 \Leftrightarrow x(x^2+mx+1)=0$ (1) $\Leftrightarrow x=0$ hoặc $f(x)=x^2+mx+1=0$ (2)

Với $x=0$ ta có $y=1$ nên (d) luôn cắt (C_m) tại điểm $A(0;1)$

Ta thấy $x=0$ không phải nghiệm của (2) nên điều kiện để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt là phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=m^2-4>0 \Leftrightarrow m<-2$ hoặc $m>2$

Lúc đó x_B,x_C là nghiệm của (2). Theo định lý Vi-ét ta có $x_B+x_C=-m, x_B.x_C=1$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại B,C là:

$k_1=y'(x_B)=3x_B^2+2mx_B,\quad k_2=y'(x_C)=3x_C^2+2mx_C$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Điều kiện để hai tiếp tuyến vuông góc với nhau là $k_1.k_2 = -1$, tức là phải có:

$(3x_B^2 + 2mx_B)(3x_C^2 + 2mx_C) = -1 \Leftrightarrow 9(x_Bx_C)^2 + 6mx_Bx_C(x_B + x_C) + 4m^2x_Bx_C + 1 = 0$

$\Rightarrow 9 - 6m^2 + 4m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 5 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) và đường thẳng (d)

$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0$

d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C $\Leftrightarrow m < \frac{9}{4}, m \neq 0$

Khi đó: x_B, x_C là các nghiệm của phương trình: $x^2 + 3x + m = 0 \Rightarrow x_B + x_C = -3$; $x_B.x_C = m$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_1 = 3x_B^2 + 6x_B + m$ và tại C là $k_2 = 3x_C^2 + 6x_C + m$

$k_1 + k_2 = 3\left[(x_B + x_C)^2 - 2x_Bx_C\right] + 6(x_B + x_C) + 2m = 3\left[(-3)^2 - 2m\right] + 6(-m) + 2m$

$k_1 + k_2 = 27 - 10m$ với $k_1 + k_2 \geq 17$ tức $27 - 10m \geq 17 \Leftrightarrow m \leq 1$

Đối chiếu điều kiện, suy ra: $m \leq 1, m \neq 0$

Bài 3:

1. Tiếp tuyến của (Cm) tại điểm có hoành độ x_0 vuông góc với đường thẳng

$y = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow f'(x_0).\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 10x_0 + m + 4 = -2 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 10x_0 + m + 6 = 0$ (1)

x_0 tồn tại $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 25 - 3(m + 6) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{3}$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và Ox:

$x^3 - 5x^2 + (m + 4)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + m) = 0$ (2)

$\Leftrightarrow x = 1,\ g(x) = x^2 - 4x + m = 0$ (3)

(Cm) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ 1 - 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

Vì x = 1 là hoành độ điểm A nên hoành độ của B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (3), suy ra $k_1 = 3x_1^2 - 10x_1 + m + 4$, $k_2 = 3x_2^2 - 10x_2 + m + 4$

Vì $x_1 = 2 - \sqrt{4 - m}$, $x_2 = 2 + \sqrt{4 - m}$.

$\Rightarrow k_1 = 3\left(2 - \sqrt{4 - m}\right)^2 - 10\left(2 - \sqrt{4 - m}\right) + m + 4 = 8 - 2m - 2\sqrt{4 - m}$

$k_2 = 3\left(2 + \sqrt{4 - m}\right)^2 - 10\left(2 + \sqrt{4 - m}\right) + m + 4 = 8 - 2m + 2\sqrt{4 - m}$

$\Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = \left(8 - 2m - 2\sqrt{4 - m}\right)^2 + \left(8 - 2m + 2\sqrt{4 - m}\right)^2 = 8m^2 - 72m + 160$

$k_1^2 + k_2^2 = 160 \Leftrightarrow 8m^2 - 72m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 9$

So với điều kiện $\begin{cases} m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$ chỉ nhận m = 0.

3. Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + (m - 4)x + m = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x^2 - 4x + m = 0$ (1)

Ta thấy, đồ thị luôn cắt trục Ox tại điểm $A(-1;0)$ với mọi m.

Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, thì phương trình (1) phả có 2 nghiệm phân biệt khác −1, tức là $\begin{cases} 4 - m > 0 \\ 5 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -5 \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), theo định lý Vi et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$

Khi đó x_1, x_2 là hoành độ của B,C và hệ số góc tại A, B, C là:

$k_A = m + 5, k_B = 3x_1^2 - 6x_1 + m - 4, k_C = 3x_2^2 - 6x_2 + m - 4$

Theo giả thiết, ta có: $m + 5 + \frac{1}{3x_1^2 - 6x_1 + m - 4} + \frac{1}{3x_2^2 - 6x_2 + m - 4} = 0$

$\Leftrightarrow m + 5 + \frac{\left(3x_1^2 - 6x_1 + m - 4\right) + \left(3x_2^2 - 6x_2 + m - 4\right)}{\left(3x_1^2 - 6x_1 + m - 4\right)\left(3x_2^2 - 6x_2 + m - 4\right)} = 0$

$\Leftrightarrow m + 5 + \frac{4(4 - m)}{4(m - 4)(m + 5)} = 0 \Leftrightarrow m + 5 - \frac{1}{m + 5} = 0 \Leftrightarrow (m + 5)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = -6 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, ta thấy $m = -6$ hoặc $m = -4$ thỏa bài toán.

Bài 4:

1. $\begin{cases} A(0;-1) \in y = \dfrac{ax + b}{x - 1} \\ y' = \dfrac{-a - 1}{(x - 1)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

2. (d) đi qua điểm $B(-2;2)$ có phương trình $y = m(x + 2) + 2$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2 khi phương trình $m(x + 2) + 2 = \frac{2x + 1}{x - 1}$ có hai nghiệm khác 1, hay phương trình $mx^2 + mx - 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phâ biệt khác 1, tức là: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m(2m + 3) > 0 \\ m1^2 + m1 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{array}\right.$ (*)

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Giả sử $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$, hai cạnh hình chữ nhật M_1PM_2Q có độ dài là

$$M_1P = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{9m^2+12m}}{|m|}, M_1Q = |y_2 - y_1| = \sqrt{9m^2+12m}$$

Hình chữ nhật M_1PM_2Q trở thành hình vuông khi và chỉ khi

$$M_1P = M_1Q \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9m^2+12m}}{|m|} = \sqrt{9m^2+12m} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = 1 \ (\text{do}(*))$$

Dạng 4: TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ ĐỒNG THỜI ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Bài 1:

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{x^2+4x+3}{x+2} = kx+1$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3 = (x+2)(kx+1)$ (với $x \neq -2$) $\Leftrightarrow (k-1)x^2 + (2k-3)x - 1 = 0$ (1).

Đồ thị (C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác −2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta = 4k^2 - 8k + 5 > 0 \Leftrightarrow k \neq 1. \\ 1 \neq 0 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) $\Rightarrow A(x_1; kx_1+1), B(x_2; kx_2+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_I = \frac{k(x_1+x_2)}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{2k-3}{2(k-1)} \\ y_I = \frac{k(2k-3)}{2(k-1)} + 1 \end{cases}$$

Với: $x_I = \frac{2k-3}{2k-2} \Rightarrow k = \frac{2x_I - 3}{2x_I - 2}$, $x_I \neq 1$, suy ra: $y_I = \frac{2x_I^2 - 3x_I}{2x_I - 2} + 1 = \frac{2x_I^2 - x_I - 2}{2x_I - 2}$

Vậy quỹ tích trung điểm là đường cong $y = \frac{2x^2 - x - 2}{2x - 2}$.

2. Xét $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của (C_m)

$$\Rightarrow y_0 = \frac{mx_0 + 1}{x_0 + m} \Leftrightarrow m(x_0 - y_0) + 1 - x_0y_0 = 0 \ \forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \pm 1$$

$\Rightarrow (C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định $A(-1;-1)$, $B(1;1)$

Vì $m \in (-1;1) \Rightarrow A, B$ nằm về hai nhánh của (C_m)

Mặt khác hai điểm A, B luôn nằm trong đường tròn (C) $\Rightarrow$ mỗi nhánh của đồ thị (C_m) luôn cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt $\Rightarrow (C_m)$ và (C) luôn cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

Bài 2:

1. a) (d) qua A(−1;0) và có hệ số góc là m.suy ra phương trình (d): $y = m(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$x^3 - 3x^2 + 4 = m(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) - m(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0 \Leftrightarrow x = -1, g(x) = x^2 - 4x + 4 - m = 0$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A,M,N $\Leftrightarrow$ Phương trình g(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt khác −1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}$.

b) x_M, x_N là hai nghiệm của phương trình g(x) = 0, I là trung điểm của MN suy ra

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 2 \ (*) \\ y_I = m(x_I + 1) \ (\text{do } I \in (d)) \end{cases}$$

Từ (*) suy ra I thuộc đường thẳng (D): x = 2.

Giới hạn. $y_I = m(x_I+1) = 3m \Leftrightarrow m = \frac{y_I}{3}$.

Điều kiện: $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y_I}{3} > 0 \\ \frac{y_I}{3} \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_I > 0 \\ y_I \neq 27 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm I là phần của đường thẳng x = 2 ứng với các điểm có tung độ thỏa $y_I > 0$ và $y_I \neq 27$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2-x}{x+1} = m(x-1) + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2 - x = m(x^2 - 1) + 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ mx^2 + 3x - m = 0 \ (*) \end{cases}$$

(d) cắt (C) tại hai điểm M,N thuộc hai nhánh khác nhau của (C) $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 < -1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9 + 4m^2 > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 - \frac{3}{m} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Tập hợp trung điểm I của MN.

Ta có: $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3}{2m}$, $I \in (d) \Rightarrow y_I = m(x_I - 1) + 2$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} x_I = -\frac{3}{2m} \\ y_I = m(x_I - 1) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2x_I} \\ y_I = -\frac{3}{2x_I}(x_I - 1) + 2 = \frac{3}{2x_I} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Rightarrow$ I thuộc đường (L) có phương trình: $y=\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}$.

Giới hạn: $m>0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2x_I}>0 \Leftrightarrow x_I<0$.

Vậy tập hợp các điểm I là phần của đường (L): $y=\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}$ ứng với các điểm có hoành độ âm.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$x^3+2x^2+1=x^3+x^2-mx+2 \Leftrightarrow x^2+mx-1=0 \ (1).$$

(C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta=m^2+4>0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh trung điểm I của AB thuộc đồ thị hàm số $y=4x^3+4x^2+3x+3$.

Khi đó $A(x_1;x_1^3+2x_1^2+1)$, $B(x_2;x_2^3+2x_2^2+1)$

trong đó x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

I là trung điểm của AB,suy ra: $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_I=\dfrac{x_1^3+2x_1^2+1+x_2^3+2x_2^2+1}{2} \end{cases}$

Lại có: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=8x_I^3+6x_I$ (do $x_1+x_2=2x_I, x_1x_2=-1$).

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4x_I^2+2.$$

Suy ra $y_I=\frac{8x_I^3+6x_I+8x_I^2+6}{2}=4x_I^3+4x_I^2+3x_I+3$.

Vậy I thuộc đồ thị của hàm số $y=4x^3+4x^2+3x+3$.

Viết phương trình đường thẳng AB.

Tọa độ A,B thỏa hệ $\begin{cases} y=x^3+2x^2+1 \\ y=x^3+x^2-mx+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3+2x^2+1 \ (2) \\ x^2+mx-1=0 \ \ (3) \end{cases}$

Từ phương trình (3),suy ra $x^2=1-mx$. Thay vào phương trình (*) ta được

$y=x.x^2+2x^2+1=x(1-mx)+2(1-mx)+1$

$=-mx^2+x-2mx+3=-m(1-mx)+x-2mx+3$

$=m^2x-2mx+x+3-m=(m-1)^2x+3-m.$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm AB là $y=(m-1)^2x+3-m$.

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

Dạng 1: *Tìm các điểm đối xứng nhau trên đồ thị*

Bài 1:

1. Giả sử $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$ thuộc (C) và I là trung điểm của M và N :

Ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=2x_I=0 \\ y_1+y_2=2y_I=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-x_1 \\ y_2=5-y_1 \end{cases} \Leftrightarrow N(-x_1;5-y_1)$

M và N đều thuộc (C) nên ta có hệ : $\begin{cases} y_1=\dfrac{x_1^2+x_1+2}{x_1-1} \quad (1) \\ 5-y_1=\dfrac{x_1^2-x_1+2}{-x_1-1} \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1) cộng với (2) ta được : $5=\frac{x_1^2+x_1+2}{x_1-1}-\frac{x_1^2-x_1+2}{x_1+1}$

$\Leftrightarrow 5(x_1^2-1)=(x_1+1)(x_1^2+x_1+2)-(x_1-1)(x_1^2-x_1+2) \Leftrightarrow x_1^2=9 \ \Rightarrow x=\pm 3$

$x_1=-3 \Rightarrow y_1=-2$ ta được $M(-3;-2),N(3;7)$

$x_2=3 \Rightarrow y_2=7$ ta được $M(3;7),N(-3;-2)$

2. M $(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là hai điểm đối xứng qua E $\Leftrightarrow$ E là trung điểm của MN .

Mặt khác M, N thuộc (C) nên tọa độ M, N thỏa mãn hệ : $\begin{cases} y_1=\dfrac{x_1^3}{3}+x_1^2+3x_1-1 \ (2) \\ y_2=\dfrac{x_2^3}{3}+x_2^2+3x_2-1 \ (3 \\ x_1+x_2=2x_E=-1 \quad (4 \\ y_1+y_2=2y_E=-\dfrac{7}{3} \quad (5 \end{cases}$

Cộng hai phương trình (2) và (3) vế với vế, ta được

$y_1+y_2=\frac{1}{3}(x_1^3+x_2^3)+(x_1^2+x_2^2)+3(x_1+x_2)-2$

$=\frac{1}{3}\left[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\right]+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(3x_1+x_2)-2 \ (6)$

Thay (4) và (5) vào phương trình (6) ta được $-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(-1+3x_1x_2)+1-2x_1x_2-3-$

$\Leftrightarrow -7=-1+3x_1x_2+3-6x_1x_2-15 \Rightarrow x_1x_2=-2$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\x_1x_2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1=-2\\x_2=1\end{cases}$

Vậy hai điểm trên (C) đối xứng qua E là hai điểm có tọa độ là $\left(-2;-\frac{17}{3}\right),\left(1;\frac{10}{3}\right)$.

3. M $(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là hai điểm đối xứng qua E $\Leftrightarrow$ E là trung điểm của MN.

Mặt khác M, N thuộc (C) nên tọa độ M, N thỏa mãn hệ: $\begin{cases}y_1=\dfrac{3-2x_1}{x_1}=-2+\dfrac{3}{x_1} & (1)\\ y_2=\dfrac{3-2x_2}{x_2}=-2+\dfrac{3}{x_2} & (2)\\ x_1+x_2=-2 & (3)\\ y_1+y_2=-2 & (4)\end{cases}$

Cộng hai phương trình (2) và (1) vế với vế, ta được:

$$y_1+y_2=-4+3\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=-4+3\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\ (5)$$

Thay (4) và (3) vào phương trình (5) ta được : $x_1x_2=-3$

$\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1.x_2=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-3\\x_2=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1=1\\x_2=-3\end{cases} \Rightarrow (-3;-3),\ (1;1)$ là tọa độ cần tìm.

4. Gọi $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là cặp điểm thuộc (C) đối xứng nhau qua I, thế thì $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}y_1=x_1^3+3x_1-2 & (1)\\ y_2=x_2^3+3x_2-2 & (2)\\ x_1+x_2=2x_I=4 & (3)\\ y_1+y_2=2y_I=36 & (4)\end{cases}$

Cộng hai phương trình (1) và (2) vế với vế, ta được

$$y_1+y_2=x_1^3+x_2^3+3(x_1+x_2)-4$$

$\Leftrightarrow y_1+y_2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+3(x_1+x_2)-4\ (5)$

Thay (3) và (4) vào (5) ta được: $36=64-12x_1x_2+12-4 \Leftrightarrow x_1x_2=3$.

Vậy x_1,x_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1x_2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=3\end{cases} \vee \begin{cases}x_1=3\\x_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=2\\y_2=34\end{cases} \vee \begin{cases}y_1=34\\y_2=2\end{cases}$

Vậy cặp điểm cần tìm là $M(1;2)$, $N(3;34)$.

5. Gọi $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là cặp điểm thuộc (C) đối xứng nhau qua I, thế thì $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}y_1=\dfrac{3}{2}x_1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2x_1+1} & (1)\\ y_2=\dfrac{3}{2}x_2+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2x_2+1} & (2)\\ x_1+x_2=2x_I=1 & (3)\\ y_1+y_2=2y_I=2 & (4)\end{cases}$

Cộng hai phương trình (1) và (2) vế với vế,ta được

$$y_1+y_2=\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2x_1+1}+\frac{1}{2x_2+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\left[\frac{2(x_1+x_2)+2}{4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1}\right]\ (5)$$

Thay (3) và (4) vào (5) ta được:

$$2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\left(\frac{4}{4x_1x_2+3}\right)=3+\frac{5}{4x_1x_2+3} \Leftrightarrow \frac{5}{4x_1x_2+3}=-1 \Leftrightarrow x_1x_2=-2$$

Vậy x_1,x_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1.x_2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x_1=-1\\x_2=2\end{cases}$.

Bài 2:

1. Viết lại phương trình (C) : $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)\in(C)$ nên có:

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)}{x_2-x_1}\left(1-\frac{1}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)=1-\frac{1}{(x_1-1)(x_2-1)},\ k_d=1$$

Nếu A,B đối xứng nhau qua (d) thì : $\begin{cases}k_{AB}.k_d=-1 & (1)\\ I\in d & (2)\end{cases}$ với I là trung điểm A,B

Từ (1): $1-\dfrac{1}{(x_1-1)(x_2-1)}=-1 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1.x_2-(x_1+x_2)+\dfrac{1}{2}=0\ (*)$

I là trung điểm A,B thì $\begin{cases}x_1+x_2=2x_I\\y_1+y_2=2y_I\end{cases}$

Từ (2) $\Leftrightarrow y_1+y_2=x_1+x_2-2 \Leftrightarrow x_1+x_2+2+\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}=x_1+x_2-2$

$\Leftrightarrow 4+\dfrac{(x_1+x_2-2)}{(x_1-1)(x_2-1)}=0 \Leftrightarrow 4+2(x_1+x_2-2)=0 \Leftrightarrow x_1+x_2=0\ \ (**)$

Từ (*) và (**) ta có hệ : $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1.x_2=-2\end{cases}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Rightarrow x_1; x_2$ là hai nghiệm phương trình: $X^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = \sqrt{2}$ hoặc $X_2 = -\sqrt{2}$

2. Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm A, B có hoành độ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -x + m \quad (1) \Leftrightarrow g(x;m) = 2x^2 - (3+m)x + 2 + m = 0 \; (2)$$

(có hai nghiệm khác 1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3+m)^2 - 8(2+m) > 0 \\ g(1;m) = 2 - 3 - m + 2 + m = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 2m - 7 > 0$$

$\Rightarrow m < 1 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 1 + 2\sqrt{2}$ $(*)$

I là trung điểm A, B thì $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+m}{4} \\ y_I = -x_I + m = m - \dfrac{3+m}{4} = \dfrac{3m-3}{4} \end{cases}$

Để A, B đối xứng nhau qua (d) thì I phải thuộc (d): $y_I = x_I + 3$

$$\Leftrightarrow \frac{3m-3}{4} = \frac{3+m}{4} + 3 \Leftrightarrow 2m = 18 \Rightarrow m = 9$$

Với $m = 9$ thì (2) trở thành: $2x^2 - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{14}}{2}$ hoặc $x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{14}}{2}$

3. A, B nằm trên đồ thị (C_m) và trên đường thẳng (d), nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{x^2 + (m-2)x + m + 1}{x+1} = 5x + 3 \\ y = 5x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x;m) = 4x^2 - (m-10)x - m + 2 = 0 \quad (1) \\ y = 5x + 3 \end{cases}$

Nhận thấy $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 68 > 0 \\ g(-1;m) = 4 + m - 10 - m + 2 = -4 \neq 0 \end{cases} \forall m \in \mathbb{R}$ nên $\forall m \in \mathbb{R}$ thì (d) cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B.

I là trung điểm A, B thì $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{m-10}{8} \\ y_I = 5x_I + 3 = 5\left(\dfrac{m-10}{8}\right) + 3 = \dfrac{5m-26}{8} \end{cases}$

Để A, B đối xứng nhau qua (d') thì I phải thuộc (d'):

$$\frac{m-10}{8} + \frac{5(5m-26)}{8} + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{34}{13}$$

4. Giả sử A, B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua Δ, suy ra phương trình AB: $y = \dfrac{17}{16}x + m$

Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình: $\dfrac{x^2 + x + 1}{x+1} = \dfrac{17}{16}x + m$

$\Leftrightarrow 16x^2 + 16x + 16 = (17x + 16m)(x+1) \Leftrightarrow x^2 + (16m+1)x + 16m - 16 = 0 \; (*)$

$(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 256m^2 - 32m + 65 > 0 \\ -16 \neq 0 \end{cases}$ đúng với mọi m.

Đường thẳng AB cắt Δ tại I nên có $\begin{cases} y = \dfrac{17}{16}x + m \\ y = -\dfrac{16}{17}x - \dfrac{33}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{-16(17m+33)}{545} \\ y_I = \dfrac{9}{8}x_I + m \end{cases}$.

Vì A và B đối xứng nhau qua Δ nên I là trung điểm của AB

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_I \Leftrightarrow -16m - 1 = \dfrac{-32(17m+33)}{545} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{16}$

Thay $m = \dfrac{1}{16}$ vào $(*)$ ta được: $x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5, x = 3$

Vậy, $A\left(-5; -\dfrac{21}{4}\right)$ và $B\left(3; \dfrac{13}{4}\right)$ là cặp điểm cần tìm.

5. Xét điểm $M(x_0; y_0)$ thì điểm N đối xứng của M qua đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ có tọa độ là $(3 - x_0; y_0)$ với $x_0 \neq \dfrac{3}{2}$ vì khi $x_0 = \dfrac{3}{2}$ thì M trùng với N).

M, N thuộc (C) nên có hệ $\begin{cases} y_0 = (x_0 - 2)^3 - 3x_0 + 4 \\ y_0 = (3 - x_0 - 2)^3 - 3(3 - x_0) + 4 \end{cases}$ (I)

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = (x_0 - 2)^3 - 3x_0 + 4 \; (1) \\ (x_0 - 2)^3 - 3x_0 + 4 = (3 - x_0 - 2)^3 - 3(3 - x_0) + 4 \; (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (x_0 - 2)^3 - (1 - x_0)^3 - 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 9x_0^2 + 9x_0 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = \dfrac{3}{2}$ (loại)

Lần lượt thay $x_0 = 0, x_0 = 3$ vào (1), ta được $y_0 = -4$.

Vậy, hai điểm cần tìm là $(0;-4)$ và $(3;-4)$

6. Gọi A, B là hai điểm cần tìm. A, B đối xứng qua d khi và chỉ khi AB vuông góc với d tại trung điểm I của đoạn AB.

Viết lại phương trình d dưới dạng: $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

http://sachxua.edu.vn

AB vuông góc với d suy ra phương trình đường thẳng AB có dạng $y=-3x+m$.

www.facebook.com/daykem.quynhon

Trung điểm I của AB là giao điểm của AB với d do đó hoành độ I là nghiệm của phương trình : $\frac{1}{3}x_I+\frac{8}{3}=-3x_I+m \Leftrightarrow \frac{10}{3}x_I=m-\frac{8}{3} \Leftrightarrow x_I=\frac{3}{10}\left(m-\frac{8}{3}\right)$.

Mặt khác A,B thuộc (C) nên x_A, x_B là hai nghiệm cua phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng AB:

$$\frac{2x+1}{x+2}=-3x+m \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+(8-m)x+1-2m=0 \ (*)\\ x\neq -2\end{cases}$$

Vì I thuộc đường thẳng AB do đó I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$x_A+x_B=2x_I \Leftrightarrow \frac{m-8}{3}=\frac{6}{10}\left(m-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow m=-4.$$

Với $m=-4$ thì phương trình (*) trở thành $3x^2+12x+9=0 \Leftrightarrow x=-1, x=-3$.

Lần lượt thay $x=-1, x=-3$ vào phương trình (C) ta được $y=-1$, $y=5$.

Vậy hai điểm thuộc (C) đối xứng với nhau qua đường thẳng d là hai điểm $(-1;-1)$, $(-3;-5)$.

7. Giả sử $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là hai điểm trên (C) đối xứng với nhau qua đường thẳng (D), thế thì MN vuông góc với (D) tại trung điểm I của đoạn MN.

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua M và N. Vì (Δ) vuông góc với (D) nên phương trình (Δ) có dạng: $y=3x+m$.

I là giao điểm của (Δ) với (D) nên hoành độ của I là nghiệm của phương trình :

$$3x_I+m=-\frac{1}{3}x_I+\frac{5}{3} \Leftrightarrow x_I=\frac{5-3m}{10}.$$

M,N là giao điểm của (C) với đường thẳng (Δ) nên các hoành độ x_1, x_2 của M, N là nghiệm của phương trình $\frac{x^2-x+4}{x-1}=3x+m \Leftrightarrow 2x^2-(2-m)x-m-4=0$ (1) (vì $x=1$ không là nghiệm của (1).

I là trung điểm của đoạn MN nên : $x_I=\frac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow \frac{5-3m}{10}=\frac{2-m}{4} \Leftrightarrow m=0$.

Khi $m=0$ thì phương trình (1) trở thành : $2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$.

Thay $x=2$ vào phương trình (C) ta được $y=6$.

Thay $x=-1$ vào phương trình (C) ta được $y=-3$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $M(2;6)$, $N(-1;-3)$.

Bài 3:

1. Ta có : $y'=3x^2-3mx=3x(x-m)$ và ta có : $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=m$

Với $m\neq 0$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu: $A\left(0;\frac{1}{2}m^3\right)$ và $B(m;0)$

Tính : $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0-\frac{1}{2}m^3}{m-0}=-\frac{1}{2}m^2$, $k_d=1$

I là trung điểm A,B thì $\begin{cases}x_I=\frac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_I=\frac{0+m}{2}=\frac{m}{2}\\ y_I=\frac{0+\frac{1}{2}m^3}{2}=\frac{1}{4}m^3\end{cases}$

Để A,B đối xứng nhau qua (d) thì $\begin{cases}k_{AB}.k_d=-1\\ I\in d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}m^2.1=-1\\ y_I=x_I\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^2=2\\ \frac{1}{4}m^3=\frac{m}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện.

2. Ta có : $y'=\frac{(2x+m)(x+2)-(x^2+mx+2m-3)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-3\end{array}\right.$

Chứng tỏ y' không phụ thuộc vào m, hay với mọi m hàm số luôn có hai điểm cực trị. Gọi hai điểm cực trị là : $M(-1;m-2)$, $N(-3;m-6)$

Tính : $k_{MN}=\frac{(m-6)-(m-2)}{-3+1}=2$, $k_d=-\frac{1}{2}$.

Gọi I là trung điểm của MN $\Leftrightarrow \begin{cases}x_I=\frac{-1-3}{2}=-2\\ y_I=\frac{m-2+m-6}{2}=m-4\end{cases}$

MN đối xứng nhau qua (d) thì $\begin{cases}k_{MN}.k_d=-1\\ I\in d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\\ -2+2(m-4)+8=0\end{cases} \Rightarrow m=1$

Bài 4:

1. Dời hệ tọa độ Oxy về hệ tọa độ IXY theo công thức dời trục

$\begin{cases}x=X+1\\ y=Y-1\end{cases}$. Phương trình đường cong (C) đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y-1=-(X+1)^3+3(X+1)^2-3 \Leftrightarrow Y=-X^3+3X$$

Trong hệ trục mới hình vuông ABCD biến thành hình vuông A'B'C'D'.

Xét $A'(a;-a^3+3a)$, $B'(b;-b^3+3b)$ với $a\neq b$ và ta giả sử $a,b>0$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

A'B'C'D' là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{IB'}=0 \\ IA'=IB' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+ab(a^2-3)(b^2-3)=0 \\ a^2+(a^3-3a)^2=b^2+(b^3-3b)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2-3(a^2+b^2)+10=0 \\ (a+b)\left[1+(a^2+ab+b^2-3)(a^2-ab+b^2-3)\right]=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a^2b^2-3(a^2+b^2)+10=0 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} a^2b^2-3(a^2+b^2)+10=0 \\ (a^2+b^2-3)^2-a^2b^2+1=0 \end{cases}$ (II).

- Giải hệ (I): Từ $a+b=0 \Rightarrow a=-b$ thay vào phương trình thứ nhất ta có: $a^4-6a^2+10=0$ vô nghiệm
- Giải hệ (II) : Đặt $v=a^2b^2, u=a^2+b^2$

Ta có : $\begin{cases} v-3u+10=0 \\ (u-3)^2-v+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3u-10 \\ u^2-9u+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \vee \begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases}$

* $\begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$

* $\begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$.

Vì vai trò A, B như nhau nên trên (C) có hai bộ bốn điểm A, B, C ,D sao cho ABCD là hình vuông có tâm $I(1;-1)$.

2. Xét hình bình hành ABCD với

$A\left(a;a^3-2\sqrt{2}a\right), B\left(b;b^3-2\sqrt{2}b\right), C\left(c;c^3-2\sqrt{2}c\right), D\left(d;d^3-2\sqrt{2}d\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} b-a=c-d \\ b^3-a^3-2\sqrt{2}(b-a)=c^3-d^3-2\sqrt{2}(c-d) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=b+d \\ b^2+ab+a^2=d^2+cd+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=b+d \\ ab=cd \end{cases}$

Ta có $\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}=t \Rightarrow a=ct, d=bt$

Suy ra $a+c=b+d \Leftrightarrow c(1+t)=b(1+t) \Rightarrow t+1=0 \Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow a=-c, b=-d \Rightarrow$ tâm của hình bình hành là gốc tọa độ O.

Bài 5:

1. Do A,B,C thuộc(C) nên $A\left(a;-\dfrac{2}{a}\right), B\left(b;-\dfrac{2}{b}\right), C\left(c;-\dfrac{2}{c}\right)$

Gọi $H(x_0;y_0)$ là trực tâm của tam giác ABC

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$ (*)

Mà $\overrightarrow{AH}=\left(x_0-a;y_0+\dfrac{2}{a}\right), \overrightarrow{BC}=\left(c-b;\dfrac{2(b-c)}{bc}\right)$

$\overrightarrow{BH}=\left(x_0-b;y_0+\dfrac{2}{b}\right), \overrightarrow{AC}=\left(c-a;\dfrac{2(a-c)}{ac}\right)$

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-a+\dfrac{2}{bc}\left(y_0+\dfrac{2}{a}\right)=0 \\ x_0-b+\dfrac{2}{ac}\left(y_0+\dfrac{2}{b}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\dfrac{4}{abc} \\ y_0=\dfrac{abc}{2} \end{cases}$

Suy ra $y_0=-\dfrac{2}{x_0} \Rightarrow H \in (C)$.

2. Ta đổi trục toạ độ, hàm số trở thành $Y=\dfrac{3}{X}$ trên hệ trục IXY

Xét hàm số $y=\dfrac{3}{x}$

Gọi $A\left(a,\dfrac{3}{a}\right), B\left(b,\dfrac{3}{b}\right), C\left(c;\dfrac{3}{c}\right)$ là 3 điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số;

Gọi H(m,n) là trực tâm của tam giác ABC

Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0(1) \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0(2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $m=\dfrac{3na+a^2bc-9}{abc}$

Từ (2) suy ra $m=\dfrac{3nb+ab^2c-9}{abc}$

$\Rightarrow \dfrac{3na+a^2bc-9}{abc}=\dfrac{3nb+ab^2c-9}{abc} \Leftrightarrow n=\dfrac{-abc}{3}$ thay vào (1) ta được $m=\dfrac{-9}{abc}$

hay $n=\dfrac{3}{m}$ có nghĩa là H thuộc đồ thị (C).

Bài 6:

1. Giả sử $M\left(m;2m^2-3m+1\right) \in (P)$ và $N\left(n;n-5\right) \in (\Delta)$.

$MN^2=\left(m-n\right)^2+\left(2m^2-3m+1-n+5\right)^2$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$=(m-n)^2+\left[(m-5)^2+2(m^2-2m+3)\right]^2$

$=2\left[(m-n)+(m^2-2m+3)\right]^2+2(m^2-2m+3)^2$

$\geq 2(m^2-2m+3)^2\geq 2\left[(m-1)^2+2\right]^2\geq 8\Rightarrow MN\geq 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} m=1 \\ (m-n)+(m^2-2m+3)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=1\Rightarrow M(1;0) \\ n=3\Rightarrow N(3;-2) \end{cases}$

2. Tiếp tuyến d tại $M(x_0;y_0)$ thuộc (C) có hệ số góc là $y'_0=4x_0^3+4x_0$, phương trình có dạng:

$y=(4x_0^3+4x_0)(x-x_0)+x_0^4+2x_0^2-1$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4x_0^3+4x_0;-1)$.

Đường thẳng AM có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=\left(x_0;x_0^4+2x_0^2-\frac{25}{8}\right)$

Đường thẳng d và AM vuông góc nhau khi $\vec{n}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với nhau tức

$(4x_0^3+4x_0)\left(x_0^4+2x_0^2-\frac{25}{8}\right)+x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $4(x_0^2+1)\left[(x_0^2+1)^2-\frac{33}{8}\right]+1=0\ (*)$.

Đặt $t=x_0^2+1\geq 1$, phương trình $(*)$ trở thành $4t\left(t^2-\frac{33}{8}\right)+1=0$, phương trình này có nghiệm $t=2$ thỏa điều kiện $t\geq 1$.

Với $t=2$ tức $x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=-1$ hoặc $x_0=1$.

Vậy, có 3 điểm cần tìm $M(-1;2)$, $M(0;-1)$, $M(1;2)$.

3. Giả sử $M(m,m^3-3m^2+1)$, $N(n,n^3-3n^2+1)$ với $m\neq n$ là tọa độ thỏa đề bài.

Vì tiếp tuyến tại M, N song song với nhau nên $y'(m)=y'(n)$

hay $3m^2-6m=3n^2-6n\Leftrightarrow(m-n)(m+n-2)=0\Rightarrow n=2-m,\ m\neq 1$

Hơn nữa $MN^2=(m-n)^2+(m^3-3m^2+1-n^3+3n^2-1)^2$, rút gọn ta được

$MN^2=4(m-1)^6-24(m-1)^4+40(m-1)^2$, do $n=2-m$

Mà $MN=4\sqrt{2}$ suy ra $4t^3-24t^2+40t=32$ với $t=(m-1)^2, t>0$, giải ra được $t=4$, từ đây có $(m;n)=(3;-1),(-1;3)$

Vậy, điểm cần tìm $M(3;-1)$, $N(-1;3)$.

Bài 7:

1. Xét $B\left(b;\frac{2}{b}\right)$, $C\left(c;\frac{2}{c}\right)$ $b<0<c$ là 2 điểm thuộc đồ thị $y=\frac{2}{x}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng $y=-2$, khi đó $H(b;-2)$ và $K(c,-2)$.

Dễ thấy $\widehat{BAH}+\widehat{CAK}=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}=90^0\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

Suy ra $\Delta AHB=\Delta CKA$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow\begin{cases} AH=CK \\ BH=AK \end{cases}$ hay $\begin{cases} (1-b)^2=\left(2+\frac{2}{c}\right)^2 \\ \left|2+\frac{2}{b}\right|=|c-1| \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} bc=3c+2\ \vee\ bc=-c-2 & (1) \\ \left|2+\frac{2}{b}\right|=|c-1| & (2) \end{cases}$

* Với $bc=3c+2\Rightarrow b=\frac{3c+2}{c}$ thay vào (2) ta được $\left|\frac{8c+4}{3c+2}\right|=|c-1|$

Suy ra $c^2+3c+2=0$ hoặc $3c^2+7c+2=0$ không thỏa $c>0$.

* Với $bc=-c-2\Rightarrow b=\frac{-c-2}{c}$ thay vào (2) ta được $\left|\frac{4}{c+2}\right|=|c-1|$

Suy ra $c^2+c-6=0\Leftrightarrow c=2$ hoặc $c=-3$ (không thỏa $c>0$)

Vậy, $B(-2;-1)$, $C(2;1)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

2. Gọi $A\left(a;2-\frac{1}{a+1}\right)$, $B\left(b;2-\frac{1}{b+1}\right)$ với $a<-1$, $b>-1$ là 2 điểm lần lượt thuộc nhánh phải và nhánh trái của đồ thị.

Đặt $u=-1-a>0$, $v=1+b>0$.

$$AB^2=(u+v)^2+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^2=(u+v)^2\left[1+\frac{1}{(uv)^2}\right]\geq 4uv\left[1+\frac{1}{(uv)^2}\right]$$

Hay $AB^2\geq 4uv+\frac{4}{uv}\geq 16$

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} u=v \\ 4uv=\frac{4}{uv} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=v \\ u^2=1 \end{cases}\Rightarrow u=v=1$

Vậy, $A(0;1)$, $B(-2;3)$ thì $\min AB=4$.

Bài 8: Gọi $A\left(a;\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{7}{3}a+\frac{7}{2}\right)$, $C\left(c;\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}c^2-\frac{7}{3}c+\frac{7}{2}\right)$ là 2 tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

I là trung điểm AC : $\begin{cases} \dfrac{a+c}{2}=1 \\ \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{7}{3}a+\dfrac{7}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}c^3-\dfrac{1}{2}c^2-\dfrac{7}{3}c+\dfrac{7}{2}\right)}{2}=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ \dfrac{1}{3}(a+c)\left[(a+c)^2-3ac\right]-\dfrac{1}{2}\left[(a+c)^2-2ac\right]-\dfrac{7}{3}(a+c)-11=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ ac=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ c=5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=5 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-3;-3) \\ C(5;21) \end{cases}$ hoặc ngược lại

TH1: $A(-3;-3)$ và $C(5;21)$.

$d:\begin{cases} x=t \\ y=2-t \end{cases}$ và $D\in(d) \Rightarrow D(t;2-t)$

Ta có: $\overrightarrow{AD}=(3+t;5-t)$, $\overrightarrow{CD}=(-5+t;-19-t)$. ABCD là hình vuông khi và chỉ khi

$\begin{cases} \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0 \\ DA=DC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-11 \vee t=5 \\ (3+t)^2+(5-t)^2=(t-5)^2+(-19-t)^2 \end{cases} \Rightarrow t=-11$ tức $D(-11;13)$.

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(16;8) \Rightarrow B(13;5)$

Vậy, $A(-3;-3)$, $B(13;5)$, $C(5;21)$, $D(-11;13)$ là tọa độ cần tìm.

TH2: $A(5;21)$ và $C(-3;-3)$ tương tự.

Bài 9:

1. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C) \Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0^2+4x_0+5}{x_0+2}\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x+y+6=0$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\frac{4x_0^2+16x_0+17}{x_0+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}\right|\geq\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4|x_0+2|=\dfrac{1}{|x_0+2|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{-3}{2} \Rightarrow y_0=\dfrac{5}{2} \\ x_0=\dfrac{-5}{2} \Rightarrow y_0=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thoả yêu cầu bài toán là $M_1\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{-5}{2}\right)$

2. Giả sử $A(a;-a^3+3a)$, $B(b;-b^3+3b)$ với $a\neq b$ và $a,b>0$.

ABCD là hình vuông tâm $O(0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} OA\perp OB \\ OA=OB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \\ OA=OB \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab+ab(a^2-3)(b^2-3)=0 \\ a^2+(a^3-3a)^2=b^2+(b^3-3b)^2 \end{cases}$ (*)

Biến đổi và rút gọn (*), ta được : $\begin{cases} a^2b^2-3(a^2+b^2)+10=0 & (1) \\ \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ (a^2+b^2-3)^2-a^2b^2+1=0 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$

Trường hợp 1 : $a+b=0$ thay vào (1), ta được : $a^4-6a^2+10=0$ (3).

Rõ ràng phương trình (3) không có nghiệm thực với $\forall a\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: Đặt $u=a^2+b^2, v=a^2.b^2$.

Khi đó hệ (1), (2) trở thành : $\begin{cases} v-3u+10=0 \\ (u-3)^2-v+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3u-10 \\ u^2-9u+20=0 \end{cases}$

Giải hệ, ta được $u=4, v=2$ hoặc $u=v=5$.

* $\begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a^2.b^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$.

* $\begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a^2.b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$.

Vì vai trò A, B như nhau nên trên (C) có hai bộ bốn điểm A, B, C, D sao cho ABCD là hình vuông có tâm $O(0;0)$.

Bài 10: Từ giả thiết, ta có: $A(-3;7)$, $B\left(b;\dfrac{2b-1}{b+2}\right)$ với $b\neq-2$.

Tam giác OAB vuông tại A khi và chỉ khi $AO\perp AB$ suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}=0$, trong đó $\overrightarrow{AO}=(-3;7)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(b+3;-\dfrac{5b+15}{b+2}\right)$.

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow -3.(b+3)-7.\dfrac{5b+15}{b+2}=0$, quy đồng và rút gọn ta được phương trình:

$3b^2+50b+123=0 \Leftrightarrow (b+3)(3b+41)=0 \Leftrightarrow b=-3$ hoặc $b=-\dfrac{41}{3}$.

http://sachxua.edu.vn

Nếu $b=-3$ thì $A\equiv B$.

Nếu $b=-\frac{41}{3}$ thì $B\left(-\frac{41}{3};\frac{17}{7}\right)$.

Vậy, $B\left(-\frac{41}{3};\frac{17}{7}\right)$ là tọa độ cần tìm.

Bài 11: A và B đối xứng nhau qua đường thẳng (d) khi và chỉ khi đường thẳng (d') nối hai điểm A và B vuông góc với (d) đồng thời trung điểm M của A và B thuộc đường thẳng (d).

Đường thẳng (d') nối hai điểm A và B vuông góc với (d) nên phương trình có dạng: $y=-\frac{x}{2}+m$

Đường thẳng (d') cắt đồ thị (C) của hàm số tại hai điểm A và B khi phương trình:

$\frac{1-2x}{1+x}=-\frac{x}{2}+m$ có hai nghiệm phân biệt, tức phương trình:

$x^2-(2m+3)x-2(m-1)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

hay $\begin{cases}\Delta=\left[-(2m+3)\right]^2+8(m-1)>0\\(-1)^2-(2m+3)(-1)-2(m-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+20m+1>0$ (2)

Với điều kiện (2) thì A và B có hoành độ là x_1 và x_2 nói cách khác

$A\left(x_1;-\frac{x_1}{2}+m\right)$ và $B\left(x_2;-\frac{x_2}{2}+m\right)$ là tọa độ cần tìm.

Trung điểm M của A và B thỏa $\begin{cases}x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2m+3}{2}\\y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2m-3}{4}\end{cases}$

M thuộc đường thẳng $(d)\Leftrightarrow 8\left(\frac{2m+3}{2}\right)-4\left(\frac{2m-3}{4}\right)-21=0$ hay $m=1$.

Với $m=1$ thỏa mãn điều kiện (2), khi đó phương trình (1) trở thành:

$x^2-5x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=5$.

Vậy, $A(0;1)$ và $B\left(5;-\frac{3}{2}\right)$ hoặc ngược lại.

Bài 12:

1. $MH\perp AB\Rightarrow dt(AMB)=\frac{1}{2}AB.MH$. Khi đó $dt(AMB)\max\Leftrightarrow MH\max$

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow M\equiv M_0(x_0;y_0)$ với $M_0\in(P)$ sao cho tiếp tuyến của (P) tại M_0 song song với AB. Hệ số góc AB là $k_1=\frac{9-1}{3+1}=2$

$k_1=y'(x_0)=2x_0=2\Leftrightarrow x_0=1$. Vậy $M(1;1)$ là điểm cần tìm.

Chú ý : Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$, đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt AB có hệ số góc $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2\neq x_1$.

2. Gọi $M\left(m;\frac{m+2}{m-1}\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C).

a. $d(M;d)=\frac{\left|2m+\frac{m+2}{m-1}-2\right|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|2m^2-3m+4|}{\sqrt{5}|m-1|}$

$d(M;d)=\frac{6\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\frac{|2m^2-3m+4|}{\sqrt{5}|m-1|}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow|2m^2-3m+4|=6|m-1|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m^2-9m+10=0\Rightarrow m=2,\ m=\frac{5}{2}\\2m^2+3m-2=0\Rightarrow m=-2,\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy có 4 điểm M cần tìm.

b. $d(M,Oy)=2d(M,Ox)\Leftrightarrow|m|=2\left|\frac{m+2}{m-1}\right|$

- $m=-2.\frac{m+2}{m-1}\Leftrightarrow m^2+m+4=0$ vô nghiệm với $\forall m\in\mathbb{R}$.
- $m=2.\frac{m+2}{m-1}\Leftrightarrow m^2-3m-4=0\Leftrightarrow m=-1,\ m=4$.

Vậy $M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $M(4;2)$ là hai điểm cần tìm.

Bài 13:

1. $B(-1;2),\ C(3;4)$.

2. $B\left(b;2+\frac{2}{b-1}\right), C\left(c;2+\frac{2}{c-1}\right), b<1<c$ thuộc $I(0;1)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B và C trên Ox

Ta có: $AB=AC, \widehat{CAK}+\widehat{BAH}=90^0=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

$\widehat{CKA}=\widehat{BHA}=90^0\Rightarrow\Delta ABH=\Delta CAK$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

Nên : $\begin{cases} AH = KC \\ HB = AK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-1;1) \\ C(3;3) \end{cases}$

3. Gọi $M(x_0;y(x_0))$ là tọa độ cần tìm và $0 \le x_0 \le 2$

Xét đường thẳng d đi qua M và song song với OA, khi đó $d(M;OA) = d(d;OA)$.

Khoảng cách này lớn nhất khi d cách xa OA nhất, khi ấy d chính là tiếp tuyến song song OA tại tiếp điểm M.

Vậy, $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. Gọi tọa độ điểm cực đại là $A(0;2)$, điểm cực tiểu $B(2;-2)$

Dễ thấy A, B nằm về hai phía của đường thẳng $y = 3x-2$.

để $MA + MB$ nhỏ nhất thì 3 điểm A, M, B thẳng hàng $\Rightarrow M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$.

5. $AB: 8x - y - 16 = 0$, $d(M;AB) = \frac{|f(x_0)|}{\sqrt{65}}$ với $f(x_0) = x_0^4 + 2x_0^2 - 8x_0 + 12$

$f'(x_0) > 0$ khi $x_0 > 1$ và $f'(x_0) < 0$ khi $x_0 < 1$, suy ra $M(1;-1)$.

6. $AM^2 = (x_0+3)^2 + (x_0-1)^6 = f(x_0)$, $f'(x_0) > 0$ khi $x_0 > 0$ và $f'(x_0) < 0$ khi $x_0 < 0$, suy ra $M(0;4)$.

Bài 14:

1. $A(a;a^3 - 5a^2 + 10a - 8) \in (C)$, $C(-25+7c;c) \in (d)$

$I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ là trung điểm AC $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a + (-25+7c)}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{(a^3 - 5a^2 + 10a - 8) + c}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{24-a}{7} \\ (a-3)(7a^2 - 14a + 27) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow A(3;4) \\ c = 3 \Rightarrow C(-4;3) \end{cases}$

Gọi $B(x_0;y_0)$, $x_0 < 0$. Tam giác OAB vuông cân tại A khi $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA} = 0 \\ AB = OA \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_0-3) + 4(y_0-4) = 0 \\ (x_0-3)^2 + (y_0-4)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1; y_0 = 7 \\ x_0 = 7; y_0 = 7 \end{array}\right. \Rightarrow B(-1;7)$.

2. Đường tròn ngoại tiếp OABC : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Từ giả thiết suy ra $E(-1;0)$, $F(0;7)$.

Dễ thấy, EF là đường kính đường tròn, nên tam giác MEF vuông tại M.

$S_{MEF} = \frac{1}{2}ME.MF \le \frac{ME^2 + MF^2}{4} = \frac{EF^2}{4} = \frac{25}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác MEF vuông cân tại M, khi đó tọa độ M thỏa hệ: $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-4;4) \\ M(3;3) \end{array}\right.$

Bài 15:

Xét đường thẳng $d: y = mx$, d quay quanh gốc tọa độ O và đường thẳng vuông góc với d là $d': y = -\frac{1}{m}x$ $(m \ne 0)$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $\frac{5}{3}x^3 - \frac{41}{12}x = mx$ tương đương với $x(20x^2 - 12m - 41) = 0$.

Giả sử d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B khác O tức phương trình $20x^2 - 12m - 41 = 0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác O, khi đó $m > -\frac{41}{12}$.

Hoành độ giao điểm của d' và (C) là nghiệm phương trình:

$\frac{5}{3}x^3 - \frac{41}{12}x = -\frac{1}{m}x$ tương đương với $x\left(20x^2 + \frac{12}{m} - 41\right) = 0$.

Giả sử d' cắt (C) tại 2 điểm phân biệt C,D khác O tức phương trình $20x^2 + \frac{12}{m} - 41 = 0$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác O, khi đó $m < 0$ hoặc $m > \frac{12}{41}$.

Như vậy, với $-\frac{41}{12} < m < 0$ hoặc $m > \frac{12}{41}$ thì d và d' cắt (C) cùng cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D.

O là tâm hình vuông ABCD nên $OA = OB = OC = OD$.

Giả sử $A(x_1;mx_1)$ với x_1 là nghiệm của (1) và $C\left(x_2;-\frac{1}{m}x_2\right)$ với x_2 là nghiệm của (2)

$OA = OC \Leftrightarrow x_1^2 + (mx_1)^2 = x_2^2 + \left(-\frac{1}{m}x_2\right)^2$, quy đồng và rút gọn ta được

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$m^2x_1^2 = x_2^2$ tương đương với $12m^4 + 41m^3 - 41m + 12 = 0$

hay $12\left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right) + 41\left(m - \frac{1}{m}\right) = 0$ (3).

Đặt $t = m - \frac{1}{m}$, phương trình (3) viết lại $12t^2 + 41t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{3}$ hoặc $t = -\frac{3}{4}$.

Với $t = -\frac{8}{3}$ tức $m - \frac{1}{m} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow m = -3$ hoặc $m = \frac{1}{3}$ thỏa điều kiện.

Với $t = -\frac{3}{4}$ tức $m - \frac{1}{m} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{8}$ thỏa điều kiện.

Với giá trị m vừa tìm được, thay vào phương trình (1) và (2) ta tìm được bộ 4 điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm O.

Bài 16:

1. $y = \frac{3(x+1)}{x-2} = 3 + \frac{9}{x-2}$

Điều kiện cần và đủ để $M(x;y) \in (C)$ có tọa độ nguyên là $x-2$ là các ước số nguyên của 9, nghĩa là $x - 2 = \pm1, \pm3, \pm9$.

Vậy có 6 điểm thỏa bài toán $(1;-6), (-3;12), (-1;0), (5;6), (-7;2), (11;4)$.

2. $y = \frac{1}{4}\left(2x + 3 + \frac{53}{6x+1}\right)$

Điều kiện cần và đủ để $M(x;y) \in (C)$ có tọa độ nguyên là

$$\frac{1}{4}\left(2x+3+\frac{53}{6x+1}\right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+3+\frac{53}{6x+1}\right) \vdots 4 \\ \left(2x+3+\frac{53}{6x+1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+3+\frac{53}{6x+1}\right) \vdots 4 \\ \frac{53}{6x+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+3+\frac{53}{6x+1}\right) \vdots 4 \\ 6x+1 = \pm1, \ \pm 53 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 14 \\ x = -9 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm thỏa bài toán $(0;14), (-9;-4)$.

Bài 17:

1. Gọi $M(x;y), M'(x';y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} x + x' = 1 \\ y + y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Rightarrow M'(1-x;2-y)$.

Vì $M(x;y), M'(x';y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases} y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-2} \\ 2 - y = \frac{x^2 - x + 4}{-x-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2 = \frac{x^2-3x+6}{x-2} + \frac{x^2+x+4}{-x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x \neq -1, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 3 \Rightarrow y = 6 \end{array}\right.$$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2,-4), M'(3;6)$

2. $A\left(-5;-\frac{21}{4}\right)$, $B\left(3;\frac{13}{4}\right)$

Dạng 2: *Điểm cố định thuộc đường cong, điểm mà họ đường cong không đi qua*

Bài 1:

1. Với $m = 1 \Rightarrow (C_1): y = x^3 - 3x^2 + x + 1$

Gọi $M(x_0;y_0), N(-x_0;-y_0)$ (với $x_0 > 0$) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

$$M, N \in (C_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 1 \\ -y_0 = -x_0^3 - 3x_0^2 - x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 1 \\ x_0^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{9} \\ x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$, $N\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$, $N(-x_0;y_0); x_0 > 0$ đối xứng nhau qua Oy.

$$M, N \in (C_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - (2m+1)x_0^2 + mx_0 + 3m - 2 \\ y_0 = -x_0^3 - (2m+1)x_0^2 - mx_0 + 3m - 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x_0^3 + 2mx_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = -m$ (do $x_0 \neq 0$).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

3. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ đồ thị (C_m) luôn đi qua

Ta có: $y_0 = x_0^3 - (2m+1)x_0^2 + mx_0 + 3m - 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m(2x_0^2 - x_0 - 3) + y_0 - x_0^3 + x_0^2 + 2 = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - x_0 - 3 = 0 \\ y_0 = x_0^3 - x_0^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 = -\frac{7}{8} \end{cases}$

Vậy họ đường cong (C_m) có hai điểm cố định: $A_1(-1;-4)$ và $A_2\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{8}\right)$.

4. Gọi $B(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà không có đường cong nào của họ đồ thị (C_m) đi qua

Ta có: $y_0 \neq x_0^3 - (2m+1)x_0^2 + mx_0 + 3m - 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m(2x_0^2 - x_0 - 3) + y_0 - x_0^3 + x_0^2 + 2 \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - x_0 - 3 = 0 \\ y_0 \neq x_0^3 - x_0^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 \neq -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 \neq -\frac{7}{8} \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua là đường thẳng $x+1=0$ trừ đi điểm $(-1;-4)$ và đường thẳng $2x-3=0$ trừ đi điểm $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{8}\right)$.

Bài 2:

1. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua

Suy ra $y_0 = \frac{mx_0+2}{2x_0+m} \Leftrightarrow m(y_0 - x_0) + 2x_0y_0 - 2 = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

Từ đó ta tìm được $A(\pm1;\pm1)$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua,

suy ra $y_0 \neq \frac{mx_0+2}{2x_0+m} \Leftrightarrow m(y_0 - x_0) + 2x_0y_0 - 2 \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

TH1: $\begin{cases} y_0 - x_0 = 0 \\ 2x_0y_0 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 \\ x_0 \neq \pm1 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} y_0 - x_0 \neq 0 \\ \frac{2x_0y_0 - 2}{x_0 - y_0} = -2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \neq x_0 \\ x_0 = \pm1 \end{cases}$.

Vậy tập hợp M là đường thẳng $y=x$ trừ hai điểm $(\pm1;\pm1)$; đường thẳng $x=-1$ trừ điểm $(-1;-1)$ và đường thẳng $x=1$ trừ điểm $(1;1)$.

Bài 3:

1. $M(x_0;y_0) \in (C_m) \Leftrightarrow y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1 + m}{x_0 - m}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x_0 \\ x_0y_0 - my_0 = 2x_0^2 + x_0 - mx_0 + 1 + m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x_0 \\ m(y_0 - x_0 + 1) + 2x_0^2 + x_0 + 1 - x_0y_0 = 0 \quad (1) \end{cases}$

Để M thuộc (Cm) với mọi $m \neq -1$ thì trước hết cần phải có (1) được nghiệm đúng với mọi $m \neq -1$ nghĩa là phải có:

$\begin{cases} y_0 - x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0 + 1 - x_0y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$.

Kiểm lại với $x_0 = -1$ thì điều kiện $m \neq x_0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Vậy với mọi $m \neq -1$ thì (C_m) đi qua điểm cố định $M(-1;-2)$.

Lại có $y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2}$

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại M là $y'(-1) = \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2} = 1$

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d) của (C_m) tại điểm M là $y = (x+1) - 2 = x - 1$.

Vậy với mọi $m \neq -1$, (C_m) tiếp xúc với đường thẳng cố định (d) $y = x - 1$ tại điểm cố định $M(-1;-2)$.

2. Với m, (C_m) có tiệm cận xiên (Dm) : $y = 2mx - m^2 + 4$

Gọi (P) : $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ là parabol cần tìm.

(Dm) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx - m^2 + 4 = ax^2 + bx + c \\ (2mx - m^2)' = (ax^2 + bx + c)' \end{cases}$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx - m^2 + 4 = ax^2 + bx + c \quad (1) \\ 2m = 2ax + b \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm.

$(2) \Leftrightarrow x = \frac{2m-b}{2a}$. Thay vào (1) ta được

$2m\left(\frac{2m-b}{2a}\right) - m^2 + 4 = a\left(\frac{2m-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{2m-b}{2a}\right) + c$

$\Leftrightarrow 8(a-1)m^2 + 4(2b - ab)m + b^2a - 2b^2 + 4ac - 16a = 0 \quad (3)$

$\forall m \neq 0$, (Dm) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ Hệ (1), (2) có nghiệm với mọi $m \neq 0$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

⇔ (3) được nghiệm đúng với mọi $m \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8(a-1)=0 \\ 4(2b-ab)=0 \\ b^2a-2b^2+4ac-16a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}.$$

Vậy $\forall m \neq 0$, (Dm) luôn tiếp xúc với parabol cố định $y = x^2+4$.

3. Gọi $(C_m): y=\dfrac{(m_1-1)x+m_1}{x-m_1}$, $(C_{m2}): y=\dfrac{(m_2-1)x+m_2}{x-m_2}$ ($m_1 \neq m_2$, m_1 và m_2 đều khác 0) là hai đồ thị bất kỳ của họ đồ thị (C_m).

(C_{m1}) tiếp xúc với (C_{m2}) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(m_1-1)x+m_1}{x-m_1}=\dfrac{(m_2-1)x+m_2}{x-m_2} & (1) \\ \dfrac{-m_1^2}{(x-m_1)^2}=\dfrac{-m_2^2}{(x-m_2)^2} & (2) \end{cases}$ (A) có nghiệm.

$(2) \Leftrightarrow m_2^2(x-m_1)^2-m_1^2(x-m_2)^2=0$ (3)

(do $m_1 \neq m_2$, m_1 và m_2 đều khác 0 nên $x = m_1$, $x = m_2$ không thỏa mãn (3)).

$\Leftrightarrow [m_2(x-m_1)-m_1(x-m_2)][m_2(x-m_1)+m_1(x-m_2)]=0$

$\Leftrightarrow (m_2-m_1)x[(m_1+m_2)x-2m_1m_2]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (m_1+m_2)x-2m_1m_2=0 \end{array}\right.$

Thay $x=0$ vào (1) ta được : $-1=-1$ (đúng)

Vậy $x = 0$ là nghiệm của hệ (A), suy ra (C_{m1}) tiếp xúc với (C_{m2}) tại điểm A(0; –1) và vì (C_{m1}), (C_{m2}) là hai đồ thị bất kỳ của họ (Cm) do đó họ (Cm) luôn tiếp xúc với nhau tại điểm cố định M(0; –1).

Cách khác.

Thay x = 0 vào phương trình của (Cm) ta được y = - 1,như vậy với mọi $m \neq 0$, họ đồ thị (Cm) luôn đi qua điểm cố định M(0;1).

Lại có phương trình tiếp tuyến (d) của họ (Cm) tại M là :

$y=y'(0)(x-0)+y(0)=-1(x-0)-1=-x-1.$

Vì họ (Cm) luôn có một tiếp tuyến (d) cố định tại điểm cố định M do đó chúng luôn tiếp xúc với nhau tại M.

4. $A(x_0;y_0)\in(Hm) \Leftrightarrow y_0=\dfrac{(m-2)x_0+3m-2}{x_0+1-m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x_0+1 \\ x_0y_0+y_0-my_0=mx_0-2x_0+3m-2 \quad (1) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow m(x_0+3+y_0)-x_0y_0-y_0-2x_0-2=0$ (2)

$\forall m \neq 0, A\in(Hm) \Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+3+y_0=0 \\ x_0y_0+y_0+2x_0+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0-3 \\ x_0(-x_0-3)-x_0-3+2x_0+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0-3 \\ x_0^2+2x_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-2 \end{cases}$$

Vậy A(-1; -2) là điểm cố định của (Hm).

Chứng minh hệ số góc của tiếp tuyến của (Hm) tại A là hằng số.

$$y'=\frac{-m^2}{(x+1-m)^2}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (Hm) tại A là $y'(-1)=\dfrac{-m^2}{(-m)^2}=-1$.

Vậy (Hm) tiếp xúc đường thẳng cố định :

$y = -(x+1)-2 = -x-3$ tại điểm cố định A(-1;-2).

Bài 4:

1. Xét điểm $A(x_0;x_0+1)$ thuộc đường thẳng (d) và xét phương trình

$x_0+1=mx_0^4-(4m-1)x_0^2+3m+1$ (1).

Xem phương trình (1) là phương trình với ẩn số là m, ta có

$(1) \Leftrightarrow m(x_0^4-4x_0^2+3)+4x_0^2-x_0=0$ (2).

$\forall m \in \mathbb{R}, A \notin (Cm) \Leftrightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4-4x_0^2+3=0 \\ 4x_0^2-x_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2=1 \vee x_0^2=3 \\ 4x_0^2-x_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=\pm1 \vee x_0=\pm\sqrt{3}.$$

Vậy các điểm cần tìm là $A_1(\sqrt{3};\sqrt{3}+1), A_2(-\sqrt{3};-\sqrt{3}+1), A_3(1;2), A_4(-1;0)$.

2. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định của (Cm) và xét phương trình :

$y_0=(m+3)x_0^3-(3m+7)x_0+m+3$ (1)

Xem phương trình (1) là phương trình ẩn m,ta có:

$(1) \Leftrightarrow m(x_0^3-3x_0+1)+3x_0^2-7x_0+3-y_0=0$ (2)

$A(x_0;y_0)$ là điểm cố định của (Cm) $\Leftrightarrow$ (2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

http://sachxua.edu.vn

www.facebook.com/daykem.quynhon

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 \\ 3x_0^3 - 7x_0 + 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 \ (3) \\ y_0 = 3x_0^3 - 7x_0 + 3 \ (4) \end{cases}$ (I).

Gọi $f(x_0) = x_0^3 - 3x_0 + 1$ thì $f(x_0)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$,

Lại có : $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$.

$f(-2).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt, suy ra hệ (I) có ba nghiệm phân biệt. Vậy (Cm) đi qua ba điểm cố định.

Mặt khác từ (3), (4) ta có: $y_0 = 3x_0^3 - 7x_0 + 3 = 3\underbrace{(x_0^3 - 3x_0 + 1)}_{0} + 2x_0 = 2x_0$.

Điều này chứng tỏ ba điểm cố định của (Cm) ở trên đường thẳng y = 2x, tức là chúng thẳng hàng.

3. Xét điểm $A(x_0; y_0)$, ta có $A \in (Cm) \Leftrightarrow y_0 = mx_0^4 + (m^2 + 2m)x_0^2 + m^3$

$\Leftrightarrow m^3 + x_0^2 m^2 + (x_0^4 + 2x_0^2)m - y_0 = 0$ (1)

Xem (1) là phương trình ẩn số là m.

Xét hàm số $f(m) = m^3 + x_0^2 m^2 + (x_0^4 + 2x_0^2)m - y_0$, $m \in \mathbb{R}$.

Ta có hàm số f(m) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(m) = 3m^2 + 2x_0^2 m + x_0^4 + 2x_0^2$.

Tam thức $f'(m)$ có biệt số $\Delta' = x_0^4 - 3(x_0^4 + 2x_0^2) = -2(x_0^4 + x_0^2) \le 0$ và có hệ số của số hạng chứa m^2 là $3 > 0$, su $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, $f'(m) \ge 0$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một điểm x_0.

$\Rightarrow$ Hàm số f(m) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lại có $\lim_{m \to +\infty} f(m) = +\infty$, $\lim_{m \to -\infty} f(m) = -\infty$

Suy ra phương trình (1) luôn có duy nhất một nghiệm.

Vậy luôn có duy nhất một đồ thị của họ (Cm) đi qua A.

MỤC LỤC

ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ 5

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 47

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ 94

TÂM ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ, PHÉP TỊNH TIẾN 100

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ 113

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ 126

TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ 157

TƯƠNG GIAO HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ 195

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ 235

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ 250

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 271

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ 306

TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ 339

TƯƠNG GIAO HAI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ 380

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ 415

http://sachxua.edu.vn